Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Wiederholung)

SS 2018, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse

Ausgabetermin:	05.06.2018
Abgabetermin:	12.06.2018

9. Übungsblatt

Aufgabe 1. Ein numerisches Verfahren arbeitet mit einer großen Datenmenge. Um die Komplexität zu reduzieren, wird nach jedem Schritt das bereits erhaltene Ergebnis auf die 5-te Dezimale gerundet. Rundungsfehler addieren sich, sind unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $(-\frac{10^{-5}}{2}, \frac{10^{-5}}{2})$. Insgesamt besteht das Verfahren aus 10^4 Schritten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Rundungsfehler im Endergebnis größer als $50 \cdot 10^{-5}$ ist?

Aufgabe 2. Ein Angestellter verlässt an den 225 Arbeitstagen eines Jahres sein Büro kurz nach Dienstschluß. Die Dauer der zusätzlichen Arbeitszeit lässt sich mit einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit dem Erwartungswert von 5 Minuten angemessen beschreiben. Die Zufallsvariablen seien als unabhängig vorausgesetzt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Angestellte dadurch in einem Jahr insgesamt mehr als 15 Überstunden arbeitet.

Aufgabe 3. Sie haben eine Geldeinheit (GE) Startkapital und spielen das folgende Münzspiel: Sie werfen wiederholt eine faire Münze. Falls Sie *Kopf* werfen, verdoppelt sich ihr Kapital. Falls Sie *Zahl* werfen, müssen Sie $\frac{2}{3}$ ihres Kapitals abgeben. Sei K_n ihr Kapital nach n Runden.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}K_n$ und zeigen Sie $\mathbb{E}K_n \to \infty$, für $n \to \infty$.

b) Zeigen Sie: $\mathbf{P}\left(K_n \to 0, \text{ für } n \to \infty\right) = 1$.

Hinweis: Wir nehmen an, dass Sie eine GE beliebig teilen können. Bestimmen Sie für a) zunächst den Erwartungswert für einen Wurf. Für *b)* ist es hilfreich $\log(K_n)$ zu betrachten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}X_n = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\widetilde{S}_n := X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n = \sum_{k=1}^{n} kX_k.$$

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}\widetilde{S}_n$ und $\mathrm{Var}(\widetilde{S}_n)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des schwachen Gesetzes der großen Zahlen oder der Tschebyscheff-Ungleichung, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\widetilde{S}_n}{n(n+1)} - \frac{\mu}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

☗ **Aufgabe 5** (5 Punkte)**.** Ein Grashüpfer startet am Ursprung der Zahlengerade und hüpft mit Wahrscheinlichkeit 0.3 um zwei Einheiten in die positive Richtung und mit Wahrscheinlichkeit 0.2 um eine Einheit in die negative Richtung und mit Wahrscheinlichkeit 0.5 bleibt er an Ort und Stelle. Dabei nehmen wir an, dass alle möglichen Sprünge unabhängig sind. S_n gebe die Position des Grashüpfers nach n Sprüngen (inklusive Null-Sprüngen) an.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von S_n.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Tier nach 10000 Sprüngen im Intervall $[3900, 4200]$?

c) Bestimmen Sie $c > 0$, sodass der Grashüpfer mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nach $n = 50000$ Sprüngen im Intervall $[\mathbb{E}S_n - c, \mathbb{E}S_n + c]$ landet.

☗ **Aufgabe 6** (3 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X = \mu \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}X = \sigma^2 > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? Beweisen Sie ihre Behauptung.

a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = a\right) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

b) Für alle $-\infty < a < b < \infty$ gilt

$$\mathbf{P}\left(\frac{a}{2} \leq \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{b}{2}\right) \to \frac{1}{2}(\Phi(b) - \Phi(a)) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

c) Für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_{2n} - S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right) \to \Phi(b) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Dienstag abzugeben. Es wird dringend empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.