

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik  
(Wiederholung)  
SS 2018, FSU Jena

Prof. Schmalfuß  
Robert Hesse

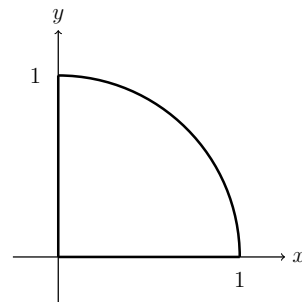
Ausgabetermin:	12.06.2018
Abgabetermin:	19.06.2018

**10. Übungsblatt**

**Aufgabe 1.**

Gegeben sei der Kreissektor  $Q$  in der  $x$ - $y$ -Ebene (siehe Abbildung).  
Der Zufallsvektor  $(X, Y)$  besitze die Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in Q, \\ 0, & (x, y) \notin Q. \end{cases}$$



- a) Bestimmen Sie  $c \in \mathbb{R}$ .
- b) Berechnen Sie die Dichten von  $X$  und  $Y$ .
- c) Bestimmen Sie  $\mathbb{E}X$ ,  $\mathbb{E}Y$  und  $\text{Cov}(X, Y)$ .

**Aufgabe 2.** Gegeben sei der 2-dimensional normalverteilte Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  mit folgender Dichte

$$f_{\mathbf{X}}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2)}.$$

- a) Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix von  $\mathbf{X}$ .
- b) Bestimmen Sie die Randverteilungen von  $X_1$  und  $X_2$ .

**Aufgabe 3.** In einem deutschen Automobilwerk werden u.a. zwei Aufgaben von Robotern erledigt. Ein Roboter schweißt zwei Gelenke, ein anderer verschraubt drei Bolzen. Für jedes produzierte Auto sei  $X$  die Anzahl der unsachgemäß gezogenen Schweißnähte und  $Y$  die Anzahl der falsch angezogenen Bolzen durch die beiden Roboter.

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $(X, Y)$  ist durch die folgende Tabelle gegeben:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0.85	0.02	0.02	0.01
1	0.02	0.02	0.01	0.01
2	0.01	0.01	0.01	0.01

- a) Bestimmen Sie die Randverteilungen  $P_X$  und  $P_Y$ .
- b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für genau eine falsche Schweißnaht und einen falsch angezogenen Bolzen an den produzierten Teilen.
- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine falsche Schweißnaht und mindestens zwei falsch angezogene Bolzen festzustellen sind.
- d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei falsch angezogene Bolzen zu finden sind.

◆ **Aufgabe 4** (4 Punkte). Es seien  $X, Y$  unabhängige, binomialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern  $n = 2$  und  $p = \frac{2}{3}$ . Wir definieren  $Z_1 = X \cdot Y$  und  $Z_2 = X - Y$ .

- Bestimmen Sie die Verteilungen von  $Z_1$  und  $Z_2$ .
- Berechnen Sie die Erwartungswerte von  $Z_1, Z_2$ , und die Kovarianz  $\text{Cov}(Z_1, Z_2)$ ,
- Sind  $Z_1$  und  $Z_2$  unabhängig?

◆ **Aufgabe 5** (4 Punkte).

a) Seien  $X$  und  $Y$  zwei unabhängige Zufallsvariablen gegeben durch

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie die Verteilung von  $Z = X + Y$ .

b) Seien  $X$  und  $Y$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen zum Parameter  $\lambda > 0$  bzw.  $\mu > 0$ . Bestimmen Sie die Verteilung von  $Z = X - Y$ .

◆ **Aufgabe 6** (4 Punkte). Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & x \in [0, 1] \text{ und } y \in [0, 1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für welches  $c \in \mathbb{R}$  ist  $f$  die gemeinsame Dichte eines zufälligen Vektors  $(X, Y)$ ?
- Bestimmen Sie die Randverteilungen  $f_X$  und  $f_Y$ .
- Berechnen Sie die Kovarianz von  $(X, Y)$ . Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?

**Abgabetermin:** Die mit ◆ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Dienstag abzugeben. Es wird dringend empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.