

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
(Wiederholung)
SS 2018, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse

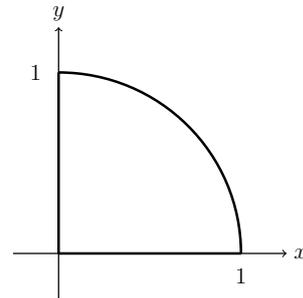
Ausgabetermin:	12.06.2018
Abgabetermin:	19.06.2018

10. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Gegeben sei der Kreissektor Q in der x - y -Ebene (siehe Abbildung). Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in Q, \\ 0, & (x, y) \notin Q. \end{cases}$$



- Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$.
- Berechnen Sie die Dichten von X und Y .
- Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ und $\text{Cov}(X, Y)$.

Aufgabe 2. Gegeben sei der 2-dimensional normalverteilte Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ mit folgender Dichte

$$f_{\mathbf{X}}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2)}.$$

- Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix von \mathbf{X} .
- Bestimmen Sie die Randverteilungen von X_1 und X_2 .

Aufgabe 3. In einem deutschen Automobilwerk werden u.a. zwei Aufgaben von Robotern erledigt. Ein Roboter schweißt zwei Gelenke, ein anderer verschraubt drei Bolzen. Für jedes produzierte Auto sei X die Anzahl der unsachgemäß gezogenen Schweißnähte und Y die Anzahl der falsch angezogenen Bolzen durch die beiden Roboter.

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von (X, Y) ist durch die folgende Tabelle gegeben:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0.85	0.02	0.02	0.01
1	0.02	0.02	0.01	0.01
2	0.01	0.01	0.01	0.01

- Bestimmen Sie die Randverteilungen P_X und P_Y .
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für genau eine falsche Schweißnaht und einen falsch angezogenen Bolzen an den produzierten Teilen.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine falsche Schweißnaht und mindestens zwei falsch angezogene Bolzen festzustellen sind.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei falsch angezogene Bolzen zu finden sind.

◆ **Aufgabe 4** (4 Punkte). Es seien X, Y unabhängige, binomialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern $n = 2$ und $p = \frac{2}{3}$. Wir definieren $Z_1 = X \cdot Y$ und $Z_2 = X - Y$.

- Bestimmen Sie die Verteilungen von Z_1 und Z_2 .
- Berechnen Sie die Erwartungswerte von Z_1, Z_2 , und die Kovarianz $\text{Cov}(Z_1, Z_2)$,
- Sind Z_1 und Z_2 unabhängig?

◆ **Aufgabe 5** (4 Punkte).

a) Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen gegeben durch

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie die Verteilung von $Z = X + Y$.

b) Seien X und Y unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen zum Parameter $\lambda > 0$ bzw. $\mu > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $Z = X - Y$.

◆ **Aufgabe 6** (4 Punkte). Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & x \in [0, 1] \text{ und } y \in [0, 1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist f die gemeinsame Dichte eines zufälligen Vektors (X, Y) ?
- Bestimmen Sie die Randverteilungen f_X und f_Y .
- Berechnen Sie die Kovarianz von (X, Y) . Sind X und Y unabhängig?

Abgabetermin: Die mit ◆ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Dienstag abzugeben. Es wird dringend empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.