Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Wiederholung)

SS 2018, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse

Ausgabetermin:	26.06.2018
Abgabetermin:	03.07.2018

12. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter. Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_\theta(x) = m\frac{x^{m-1}}{\theta^m}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ bekannt sei.

a) Berechnen Sie $\mathbf{E}_\theta X$ und $\mathbf{E}_\theta X^2$.

b) Die mathematische Stichprobe bestehe nur aus einem Versuch X. Wir definieren eine Familie von Schätzern $\hat{\theta}(m, c) = cX$ für den Parameter θ mit $c > 0$. Wie ist c zu wählen, damit $\hat{\theta}$ erwartungstreu ist?

c) Für welches c wird der mittlere quadratische Fehler

$$R(c) := \mathbb{E}_\theta \left(\hat{\theta}(m, c) - \theta\right)^2$$

minimal?

Aufgabe 2. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine mathematische Stichprobe zu einer Zufallsvariablen X mit $\mathbb{E}X = \mu$ und $\mathbb{E}X^2 = \sigma^2$. Welche der folgenden Schätzungen sind erwartungstreu?

a) $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, für den Parameter μ,

b) $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2$, für den Parameter σ^2,

c) $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X}_n)^2$, für den Parameter σ^2,

d) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_A(X_k)$, für den Parameter $\mathbf{P}(X \in A)$ für $A \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sie vermuten, dass in einem Bierzelt auf dem Oktoberfest die Maßkrüge häufig mit weniger als einem Liter Bier gefüllt sind. Sie messen bei 14 Krügen nach und erhalten bei ihrer Stichprobe eine durchschnittliche Füllmenge von 0.98 Liter bei einer empirischen Standardabweichung von 0.05 Litern. Sie dürfen annehmen, dass die Zufallsvariable X, die die Füllmenge eines Maßkruges in diesem Bierzelt beschreibt, normalverteilt ist. Führen Sie einen geeigneten statistischen Test für $\alpha = 0.05$ durch, um Ihre Vermutung zu überprüfen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** In einer Lostrommel befinden sich N Lose mit den Nummern $1, 2, \dots, N$, wobei N unbekannt ist. Sie wollen wissen, wie viele Lose sich in der Trommel befinden und entnehmen in einem unbeobachteten Moment ein Los, merken sich die aufgedruckte Nummer und legen es wieder in die Trommel zurück. Das machen Sie n-mal.
Berechnen Sie aus den gemerkten Nummern $X_1, \dots, X_n$ einen Maximum-Likelihood-Schätzer für N.
Hinweis: Betrachten Sie direkt die Likelihood-Funktion. Es ist hier nicht sinnvoll zu differenzieren.

⌂ **Aufgabe 5** (4 Punkte)**.** Die Dichte einer stetigen Zufallsvariable X sei gegeben durch

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\,\theta^2 x^3 e^{-\theta x^2}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\theta > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ für eine mathematische Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ zu X.

⌂ **Aufgabe 6** (4 Punkte)**.** Sie haben vor einigen Jahren eine Reihe Bäume eingepflanzt.
Nun bestimmen Sie ihre Höhe (in cm):

520 575 605 490 495 520 620 555 600 510.

Es wird angenommen, dass die Höhe der Bäume normalverteilt mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ ist.

a) Bestimmen Sie das zweiseitige Konfidenzintervall mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ für den Erwartungswert unter der Annahme, dass die Standardabweichung $\sigma = 50$ bekannt ist.

b) Nehmen Sie nun an, dass die Varianz unbekannt ist. Testen Sie folgende Hypothese zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$.

$$H_0\colon \mu = 525 \qquad \text{gegen} \qquad H_a\colon \mu \neq 525$$

Quantile der t–Verteilung

			β			
m	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,437
10	1,327	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551

m ist die Anzahl der Freiheitsgrade.

Abgabetermin: Die mit ⌂ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Dienstag abzugeben. Es wird dringend empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.