

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
(Wiederholung)
SS 2018, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse

Ausgabetermin:	03.07.2018
Abgabetermin:	10.07.2018

13. Übungsblatt
Probeklausur

Aufgabe 1 (5+3 Punkte).

a) Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$. Für dieses gelte: Es seien A, B, C Ereignisse mit

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{9}{16}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{7}{16},$$
$$\mathbf{P}(B \cap C) = \frac{1}{16}, \quad \mathbf{P}(A \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C).$$

Man berechne

$$\mathbf{P}(A \cap C), \quad \mathbf{P}(A \cup B \cup C), \quad \mathbf{P}(A \cap B^c), \quad \mathbf{P}(A^c \cup B^c \cup C).$$

Weiterhin berechne man die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der drei Ereignisse A, B, C eintreten.

b) Eine Versicherung ermittelt, dass bei Verkehrsunfällen von Autofahrern, die angegurtet waren, nur 8 Prozent Kopfverletzung hatten. Bei nicht angeschnallten Fahrern trugen 38 Prozent eine Kopfverletzungen davon. Es kann davon ausgegangen werden, dass 15 Prozent aller Autofahrer keinen Gurt anlegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die nach einem Unfall mit Kopfverletzung eingelieferten Autofahrer keinen Gurt trugen?

Aufgabe 2 (3+3 Punkte). Es seien $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\lambda, \mu > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.

b) Berechnen Sie

$$\mathbf{P}(X = m | X + Y = n)$$

für $0 \leq m \leq n$.

Aufgabe 3 (2+3+4+3 Punkte). Gegeben sei die nichtnegative Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 0, \\ cx, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 \leq x. \end{cases}$$

a) Für welches c ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

b) Es sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte f . Bestimmen Sie die Dichtefunktion von $Y := 2X^2 + 1$.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}(2X^2 + 1)$.

d) Bestimmen Sie die Quantile $x_{0.25}, x_{0.5}, x_{0.75}$ von X .

Aufgabe 4 (3+4 Punkte).

- a) Der jährliche Schneefall wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben, die normalverteilt mit $\mu = 50\text{cm}$ und $\sigma^2 = 100\text{cm}^2$ ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Jahr mindestens 60cm Schnee fällt?
- b) Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und standardnormalverteilt. Welche Verteilung besitzen die Zufallsvariablen $U := X + Y$ und $V := X - Y$? Sind U und V unkorreliert?

Aufgabe 5 (2+3+3 Punkte). Jedes Jahr findet zu Beginn des Wintersemesters eine Computereinführungsveranstaltung statt. Dafür wird ein Raum mit 90 Plätzen vorgesehen. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, dass etwa 20 % der angemeldeten Kursteilnehmer nicht zum Kurs erscheinen. Da jeder Teilnehmer einen eigenen Rechner während des Kurses braucht, können nicht mehr Teilnehmer als freie Computer am Kurs teilnehmen. Insgesamt gibt es 100 Erstsemester.

- a) Es haben sich alle Erstsemester für den Kurs angemeldet. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Kursteilnehmer, die zum Kurs erscheinen, einen Platz finden.
- b) Schlussfolgern Sie mit Hilfe von Teil a), wie viele Anmeldungen höchstens angenommen werden dürfen, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.995 alle erscheinenden Kursteilnehmer in einem Kurs mit 90 Plätzen einen Platz finden sollen.
- c) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit aus a) mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung ab und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 6 (3+3+3 Punkte).

- (a) Es sei $X_1, X_2, \dots, X_n$ eine mathematische Stichprobe zu $X \sim \text{Bin}(2, \theta)$ mit $0 \leq \theta \leq 1$. Ist der Schätzer

$$T(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_i)$$

erwartungstreu für θ^2 ?

- (b) Die zufällige Füllmenge X von Waschmittelpackungen sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt.
- (i) Es soll ein Intervall konstruiert werden, das die mittlere Füllmenge mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit enthält. Eine Stichprobe der Füllmenge vom Umfang 16 ergab ein arithmetisches Mittel von $\bar{x} = 4.95\text{ kg}$ und eine Standardabweichung von $\sqrt{s^2} = s = 32\text{ g}$.
- (ii) Unter der Annahme, dass die Standardabweichung gegeben ist durch $\sqrt{\sigma^2} = \sigma = 20\text{ g}$, berechnen Sie den Stichprobenumfang, sodass die Intervalllänge maximal 10 g beträgt. Dabei wird von einer statistischen Sicherheit wie unter (i) ausgegangen.