

Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik–Ergänzungen

Björn Schmalfuß

Übungsaufgaben

1) Welche der folgenden Matrizen ist keine Übergangsmatrix für eine Markov Kette mit Übergangsmatrix

$$(1) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Man berechne die stationäre Verteilung von

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(3) Gegeben sei die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Man zeichne das Übergangsdiagramm. Weiterhin ordne man Zeilen und Spalten so um, dass man die rekurrenten Äquivalenzklassen und die transienten Zustände erkennen kann.

Man berechne weiterhin das Verhalten für $t \rightarrow \infty$ der Übergangswahrscheinlichkeiten in den rekurrenten Zuständen.

(4) Gegeben Sie die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

einer Markov Kette X , die zur Zeit 0 sich im Zustand 1 befindet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt diese Markov Ketten den folgenden Pfad

$$X(1) = 2, \quad X(2) = 0, \quad X(3) = 2?$$

Nun besitze die Markov Kette die Anfangsverteilung $\pi(0) = (1/3, 1/2, 1/6)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt:

$$X(0) = 2, \quad X(1) = 1, \quad X(3) = 2?$$