Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik–Ergänzungen

Björn Schmalfuß

Übungsaufgaben 2. Serie

(1) Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{Z}^+$ mit endlicher Varianz. Man verifiziere die Formel für die Varianz, ausgedrückt durch die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2.$$

Man beschreibe die momenterzeugende Funktion mittels der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion.

Man berechne die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G(t, s)$ für einen Poisson Prozess $X(t)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Zeige weiterhin, dass $G(t, s)$ die Differentialgleichung

$$\frac{dG(t, s)}{dt} = \lambda(s - 1)G(t, s)$$

erfüllt. Man berechne umgekehrt aus der Lösung dieser Differentialgleichung $P_n(t)$.

(2) Ein Geschäft ist von 9 bis 18 Uhr geöffnet. Die zufällige Ankunft der Kunden folgt einem Poisson Prozess mit durchschnittlich 10 ankommenden Kunden pro Stunde. Man berechne die durchschnittliche Anzahl und die Varianz der Anzahl der zufällig ankommenden Kunden während der gesamten Öffnungszeit des Geschäfts. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass gar kein Kunde während 30 Minuten innerhalb der Öffnungszeit ankommt.

(3) Ein Geschäft ist von 9 bis 18 Uhr geöffnet. Kunden kommen zufällig nach einem Poisson Prozess an. Die mittlere Zeit zwischen der Ankunft zweier Kunden ist durchschnittlich 6 Minuten. Man gebe die Wahrscheinlichkeit an, dass während einer halben Stunde 0, 1, 2 Kunden ankommen. Weiterhin berechne man Mittelwert m und Varianz V der Anzahl der Kunden während der gesamten Öffnungszeit des Geschäftes.

(4) Gegeben sei ein Poisson Prozess. Man zeige für $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{P}(N(s) = k | N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

(5) Es seien N_1, N_2 zwei unabhängige Poisson Prozesse mit den Parametern $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Es sei $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ die Superposition der Poisson Prozesse. Man zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Ereignis das bezüglich N eintrifft von N_1 stammt, gleich $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ ist und unabhängig von der Zeit ist, zu der es eintritt.

(6) Es sei S_n die zufällige Zeit der Ankunft des n-ten Kunden. Die Ankünfte folgen wieder einem Poisson Prozess. Es gilt:

$$\mathbb{P}(S_n > t) = I_n(t) = \int_t^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx.$$

Man zeige mittels partieller Integration

$$I_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} + I_{n-1}(t).$$

Man entwickle mittels dieser Formel $\mathbb{P}(S_n \leq t)$ in eine endliche Reihe.

(7) Gegeben sei der Todesprozess $X(t)$ mit konstanter Sterberate $\mu_k = \mu > 0$ für $k = 1, \cdots, n$ und $P_n(0) = 1$. Man zeige:

$$P_k(t) = \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu t} \quad \text{für } k = 1, \cdots, n.$$