Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018

Blatt 1, Abgabe: 18.04.2018 (vor der Übung)

1. (1 Punkt)

   $\mathcal{R}$ sei ein Mengenring in einer nichtleeren Menge Ω und es seien $A, B \in \mathcal{R}$.

   Zeigen Sie, dass $A \cap B \in \mathcal{R}$ folgt!

2. (1+3 Punkte)

   (i) Ω sei eine nichtleere Menge. Zu einem Mengensystem $\mathcal{M}$ in Ω sei

   $$\sigma(\mathcal{M}) \;=\; \bigcap_{\mathcal{A}\colon\, \mathcal{A}\ \sigma-\text{Algebra in } \Omega,\ \ \mathcal{M}\subseteq\mathcal{A}} \mathcal{A}$$

   die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra.
   Zeigen Sie, dass $\sigma(\sigma(\mathcal{M})) = \sigma(\mathcal{M})$ gilt!

   (ii) Es seien $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{I}^d = \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]\colon \quad -\infty < a_i \leq b_i < \infty\}$ und $\mathcal{O} = \{O\colon \quad O \text{ offene Menge in } \Omega\}$.
   Zeigen Sie, dass

   $$\sigma(\mathcal{I}^d) \;=\; \sigma(\mathcal{O})$$

   gilt!
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{I}^d \subseteq \sigma(\mathcal{O})$ und $\mathcal{O} \subseteq \sigma(\mathcal{I}^d)$ gelten!

3. (1+4 Punkte)

   Gegeben sei der Mengenring $\mathcal{R} \;=\; \left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{k} (n_i - 1, n_i]\colon \;\; n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ in $\Omega = \mathbb{R}$.
   μ sei ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ mit $\mu((n-1, n]) = 1\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

   (i) Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{R})$!

   (ii) Für $Q \in 2^\Omega$ sei

   $$\mu^*(Q) \;=\; \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\colon \quad A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R},\ Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

   Zeigen Sie, dass μ^* ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$, aber kein Maß auf 2^Ω ist!