**Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018**

Blatt 2, Abgabe: 25.04.2018 (vor der Übung)

4. (1 Punkt)

   Die Funktion $F\colon\ \mathbb{R} \to [0,1]$ sei so definiert:

   $$F(x) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases} .$$

   ($F$ ist nicht rechtsstetig und somit keine Verteilungsfunktion!)

   $\mu$ sei jener Inhalt auf $\mathcal{B}_0^1 = \left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{k} (a_i, b_i]\colon \quad -\infty < a_i \leq b_i < \infty \right\}$ mit $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$, falls $-\infty < a \leq b < \infty$.

   Zeigen Sie, dass $\mu$ **kein** Prämaß auf $\mathcal{B}_0^1$ ist!

   (Hinweis: Nutzen Sie, dass $(0,1] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (1/(n+1), 1/n]$ gilt.)

5. (2+2 Punkte)

   Welche der folgenden Abbildungen $\mu_i^*\colon\ 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ sind äußere Maße?

   $$\mu_1^*(A) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ beschränkt,} \\ 1, & \text{falls } A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

   $$\mu_2^*(A) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset, \\ 1, & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ und beschränkt,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

   Begründen Sie Ihre Aussage!

6. (2 Punkte)

   Es sei $\mathcal{R}$ der von dem Mengensystem $\{(a,b] \cap \mathbb{Q} \,:\, -\infty < a \leq b < \infty\}$ erzeugte Mengenring und $\mu$ mit

   $$\mu(A) \;=\; |A| \;=\; \text{Anzahl der Elemente von } A$$

   sei ein (nicht $\sigma$-endliches) Prämaß auf $\mathcal{R}$ gegeben.

   Zeigen Sie, dass es mindestens zwei verschiedene Fortsetzungen zu einem Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten $\sigma$-Algebra (in $\mathbb{Q}$) gibt!

   (Hinweis: $\sigma(\mathcal{R})$ enthält auch nichtleere Mengen mit endlicher Kardinalität, $\mathcal{R}$ dagegen nicht.)

7. (4 Punkte)

Es sei $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots)\colon\ \omega_i \in \{0,1\}\ \forall i\}$ der Ergebnisraum des unendlich oft wiederholten Münzwurfes. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n\colon\ \Omega \longrightarrow \Omega$ durch $T_n((\omega_1, \omega_2, \ldots)) = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, 1-\omega_n, \omega_{n+1}, \ldots)$ definiert und $T_n(A) = \{T_n(\omega)\colon\ \omega \in A\}$ (für $A \subseteq \Omega$). Zeigen Sie, daß es *kein* W-Maß $P$ auf $\mathcal{A} = 2^\Omega$ gibt mit $P(T_n(A)) = P(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

(Hinweis:
Betrachten Sie die folgende Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\Omega$: Es sei $\omega \sim \omega'$ genau dann, wenn $\omega_n \neq \omega'_n$ für höchstens endlich viele $n$ gilt. Weiterhin sei $A$ eine Menge, welche von jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. $\mathcal{S} = \{S \subseteq \mathbb{N} : \operatorname{card}(S) < \infty\}$ sei die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, für $S = \{n_1, \ldots, n_k\}$ sei $T_S = T_{n_1} \circ \cdots \circ T_{n_k}$. Nehmen Sie an, dass es ein W-Maß $P$ mit der obigen Eigenschaft gibt und zeigen Sie zunächst, dass

a) $\Omega = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} T_S(A)$,

b) die Mengen $(T_S(A))_{S \in \mathcal{S}}$ sind paarweise disjunkt,

c) $P(T_S(A)) = P(A)\ \forall S \in \mathcal{S}$,

d) $\mathcal{S}$ ist abzählbar.

Folgern Sie daraus einen Widerspruch.)