**Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018**

Blatt 3, Abgabe: 02.05.2018 (vor der Übung)

8. (2 Punkte)

   Es seien $P$ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und $F$ die zugehörige Verteilungsfunktion.

   Zeigen Sie, dass

$$P\left((x_1, x_1 + y_1] \times \cdots \times (x_d, x_d + y_d]\right) = \sum_{\theta \in \{0,1\}^d} (-1)^{\sum_{i=1}^{d}(1-\theta_i)} F(x_1 + \theta_1 y_1, \ldots, x_d + \theta_d y_d)$$

   für alle $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$, $y_1, \ldots, y_d \geq 0$ gilt!

   (Hinweis: Benutzen Sie die Formel von Poincaré-Sylvester.)

9. (3 Punkte)

   $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d)$ sei die $\sigma$-Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^d$, $b \in \mathcal{R}^d$ sei beliebig.

   Zeigen Sie: Falls $B \in \mathcal{B}^d$, so folgt $B + b = \{x + b\colon \ x \in B\} \in \mathcal{B}^d$.

   (Hinweis: Definieren Sie das „System der guten Mengen“

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}^d\colon \quad B + b \in \mathcal{B}^d\}$$

   und zeigen Sie zunächst, dass

   (i) $\mathcal{I}^d \subseteq \mathcal{A}$,

   (ii) $\mathcal{A}$ is eine $\sigma$-Algebra in $\mathbb{R}^d$.)

10. (2+2 Punkte)

    Eine Maß $\mu$ auf einem Meßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt *vollständig*, wenn jede Teilmenge einer jeden $\mu$-Nullmenge zu $\mathcal{A}$ gehört.

    Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Die $\mu$-*Vervollständigung* von $\mathcal{A}$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_0$ in $\mathcal{A}$, welche $\mathcal{A}$ enthält und für beliebiges $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ auch jede Teilmenge von $N$ enthält.

    Zeigen Sie:

    (i) es gilt

$$\mathcal{A}_0 = \{A \cup N_0 : \quad A \in \mathcal{A} \text{ und } N_0 \subseteq N \text{ für ein } N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N) = 0\},$$

    (ii) $\mu_0$ mit $\mu_0(A \cup N_0) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}$, $N_0 \subseteq N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}_0$ (zeigen Sie hier zunächst die Korrektheit der Definition, d.h., die Unabhängigkeit von der Wahl der speziellen Darstellung $A \cup N_0$)!