Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018

Blatt 4, Abgabe: 09.05.2018 (vor der Übung)

11. (1+1 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A})$ sei ein messbarer Raum. Welche numerischen Funktionen $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ sind $(\mathcal{A}-\bar{\mathcal{B}})$-messbar, falls

    (i) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$,

    (ii) $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

    sind?

12. (3 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ seien messbare Räume, $f\colon \Omega \to \Omega'$ sei eine Abbildung. $\mathcal{E}'$ sei ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}'$, d.h., $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{A}'$ und $\sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}'$.

    Zeigen Sie: Falls $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\ \forall E \in \mathcal{E}'$ gilt, so ist f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar.

    (Hinweis: Betrachten Sie das „System der guten Mengen“: $\widetilde{A} := \{A \subseteq \Omega' \colon\ f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$.)

13. (2+2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum und s und t seien einfache Funktionen.

    Zeigen Sie, dass

    (i) ρ mit $\rho(E) = \int_E s\, d\mu \ \ \forall E \in \mathcal{A}$ ist ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$,

    (ii) $\int_\Omega (s+t)\, d\mu \ = \int_\Omega s\, d\mu \ + \int_\Omega t\, d\mu$

    gelten!

    (Hinweis: Wegen Lemma 2.2 aus der Vorlesung können Sie beim Beweis von (ii) voraussetzen, dass s und t in Normaldarstellung vorliegen, d.h., $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, $t = \sum_{j=1}^l \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$, $\beta_1, \ldots, \beta_l \geq 0$ und $A_1, \ldots, A_k$ sowie $B_1, \ldots, B_l$ jeweils disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$ sind mit $\bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{j=1}^l B_j = \Omega$. Stellen Sie zunächst $s+t$ auch als einfache Funktion in Normaldarstellung dar.)