Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018

Blatt 5, Abgabe: 16.05.2018 (vor der Übung)

14. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A})$ sei ein messbarer Raum und $f, g\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ seien $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$-messbare Funktionen.

    Zeigen Sie, dass $\{\omega\colon \quad f(\omega) = g(\omega)\} \in \mathcal{A}$ gilt!

15. (2 Punkte)

    Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar.

    Zeigen Sie, dass f' $(\mathcal{B} - \mathcal{B})$-messbar ist!

16. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. $\Omega_0 \subseteq \Omega$ sei eine höchstens abzählbare Menge mit $\mu(\Omega \backslash \Omega_0) = 0$ und $\{\omega\} \in \mathcal{A}\ \forall \omega \in \Omega_0$.

    Zeigen Sie: Falls $f\colon\ \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}})$-messbar ist, so gilt

    $$\int_\Omega f\, d\mu \;=\; \sum_{\omega \in \Omega_0} f(\omega)\mu(\{\omega\}).$$

17. (3 Punkte)

    Konstruieren Sie eine Folge $(\mathcal{B} - \mathcal{B})$-meßbarer Funktionen $f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, so dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nichtwachsende Folge bildet und dass mit $f_0(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

    $$\int_\mathbb{R} f_n\, d\lambda \not\longrightarrow \int_\mathbb{R} f_0\, d\lambda$$

    gilt! (λ ist das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.) Zeigen Sie, dass dann notwendigerweise $\int_\mathbb{R} f_n\, d\lambda = \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$ ist!

18. (3 Punkte)

    $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von Maßen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu_n(A) \nearrow \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. $f\colon\ \Omega \to [0, \infty]$ sei eine $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}})$-messbare Funktion.

    Zeigen Sie, dass

    $$\int_\Omega f\, d\mu_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f\, d\mu$$

    gilt!