Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018

Blatt 6, Abgabe: 23.05.2018 (vor der Übung)

19. (2 Punkte)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, $f\colon \Omega \to [0, \infty]$ sei $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}})$-messbar und es gelte $\int f \, d\mu = 0$.

Zeigen Sie, dass dann $\mu(\{\omega \in \Omega\colon f(\omega) > 0\}) = 0$ folgt!

20. (2 Punkte)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge nichtnegativer, reeller und $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$-messbarer Funktionen, welche gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert.

Zeigen Sie, dass

$$\int_\Omega f_n \, d\mu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f \, d\mu$$

gilt!

21. (2+2 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ Wahrscheinlichkeitsdichten (bezüglich des Lebesgue-Maßes) und es gelte $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(i) f sei ebenfalls eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_\mathbb{R} |f_n - f| \, d\lambda \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

folgt!

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\int_\mathbb{R} (f - f_n)^+ \, d\lambda \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ gilt und folgern Sie daraus die Behauptung.)

(ii) Es gelte $\int_\mathbb{R} f \, d\lambda \neq 1$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Eigenschaften

$$\int_\mathbb{R} f \, d\lambda < 1$$

und

$$\int_\mathbb{R} |f_n - f| \, d\lambda \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1 - \int_\mathbb{R} f \, d\lambda$$

gelten!

(Hinweis: Nutzen Sie zum Beweis der letzten Beziehung, dass $|f_n - f| = (f_n - f) + 2(f - f_n)^+$ gilt.)

22. (2 Punkte)

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein W-Raum und $X\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ sei eine numerische Zufallsvariable.

Zeigen Sie, dass

$$EX = \int_\Omega X \, dP = \int_{\bar{\mathbb{R}}} x \, dP^X(x)$$

gilt!

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $X = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ und $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$.)