Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018

Blatt 7, Abgabe: 30.05.2018 (vor der Übung)

23. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum und $(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ sei die entsprechende Vervollständigung (siehe ÜA 10). $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ sei $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}})$-messbar.

    Zeigen Sie, dass dann
    $$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f\, d\widetilde{\mu}$$
    gilt!

24. (2 Punkte)

    Finden Sie eine Folge von Funktionen $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, sodass die Riemann-Integrale $\int_0^1 f_n(x)\, dx$ existieren, der Grenzwert $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall x \in [0,1]$ existiert und das Riemann-Integral $\int_0^1 f(x)\, dx$ nicht existiert!

25. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Gegeben sei eine Funktion $f\colon \Omega \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, welche für alle $t \in (a,b)$ $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$-messbar ist. Weiterhin sei $f(\cdot, t_0)$ μ-integrierbar, $f(\omega, \cdot)$ sei für alle $\omega \in \Omega$ im Punkt t_0 differenzierbar und es existiere eine Funktion $g \in L_1(\mu)$ mit
    $$\left| \frac{f(\omega,t) - f(\omega,t_0)}{t - t_0} \right| \le g(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega, t \neq t_0 \text{ mit } |t - t_0| \le \epsilon,$$
    wobei $\epsilon > 0$ hinreichend klein ist. Zeigen Sie, dass dann $\int_\Omega f(\omega,t)\mu(d\omega)$ im Punkte t_0 differenzierbar ist mit
    $$\frac{d}{dt} \int_\Omega f(\omega,t)\, \mu(d\omega) \bigg|_{t=t_0} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t_0)\, \mu(d\omega)!$$

26. (2 Punkte)

    X sei eine nichtnegative, integrierbare Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

    Zeigen Sie, dass
    $$\lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) = 0\,!$$
    (Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz!)