Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018

Blatt 8, Abgabe: 06.06.2018 (vor der Übung)

27. (4 Punkte)

    $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ seien messbare Räume.

    Zeigen Sie, dass für beliebiges $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und beliebiges $\omega_1 \in \Omega_1$

    $$Q_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 \colon \quad (\omega_1, \omega_2) \in Q\} \in \mathcal{A}_2$$

    gilt!

    (Hinweis: Definieren Sie zunächst das System der guten Mengen

    $$\mathcal{D} := \{Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \colon \; Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2\}$$

    und zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist, welche $\{A_1 \times A_2 \colon \; A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ enthält.)

28. (2 Punkte)

    Ω sei eine nichtleere Menge und $(\mathcal{D}_i)_{i \in I}$ sei eine Familie von Dynkin-Systemen in Ω, wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

    Zeigen Sie, dass

    $$\bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_i := \{B \subseteq \Omega \colon \; B \in \mathcal{D}_i \; \forall i \in I\}$$

    ebenfalls ein Dynkon-System in Ω ist!

29. (1 Punkt)

    Ω sei eine nicht leere Menge und $\mathcal{D}$ sei ein $\cap$-stabiles Dynkin-System in Ω.

    Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra in Ω ist!

30. (1+1 Punkte)

    Betrachten Sie die Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, wobei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}$, $\mu_1 = \lambda$ (das Lebesgue-Maß) und μ_2 das (nicht σ-endliche) Abzählmaß (d.h., $\mu_2(A) = \mathrm{card}(A)$) sind. Weiter sei $D = \{(\omega, \omega) : \omega \in [0, 1]\}$.

    Zeigen Sie, dass

    (i) $D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$,

    (ii) $\int \mu_1(D_{\omega_2}) \, d\mu_2(\omega_2) \neq \int \mu_2(D_{\omega_1}) \, d\mu_1(\omega_1)$!