Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018

Blatt 9, Abgabe: 13.06.2018 (vor der Übung)

31. (2 Punkte)

    μ_1 und μ_2 seien endliche Maße auf $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass für beliebiges $B \in \mathcal{B}$ gilt:

    $$\int_B \mu_1(\{x \in B\colon\ x < y\})\, d\mu_2(y) \;=\; \mu_1(B)\mu_2(B) \;-\; \int_B \mu_2(\{y \in B\colon y \leq x\})\, d\mu_1(x)!$$

32. (1+2+2 Punkte)

    Die Funktionen $f\colon\ \mathbb{R} \to [0,\infty)$ und $g\colon\ \mathbb{R} \to [0,\infty)$ seien $(\mathcal{B}-\mathcal{B})$-messbar und es gelten $\int_{\mathbb{R}} f^2\, d\lambda < \infty$ sowie $\int_{\mathbb{R}} g^2\, d\lambda < \infty$.

    Zeigen Sie:

    (i) $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\, d\lambda(x) \;<\; \infty$,

    (ii) $h\colon\ \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ mit $h(x,y) = (f(x)g(y) - g(x)f(y))^2$ ist $(\mathcal{B}^2 - \mathcal{B})$-messbar,

    (iii) $\left(\int_{\mathbb{R}} fg\, d\lambda\right)^2 \;\leq\; \int_{\mathbb{R}} f^2\, d\lambda \;\; \int_{\mathbb{R}} g^2\, d\lambda$.
    (Hinweis: Betrachten Sie das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} h\, d\lambda^2$ und wenden Sie den Satz von Tonelli an!)

33. (1 Punkt)

    Zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} d\lambda(x) = \sqrt{2\pi}$ gilt!

    (Sie können nutzen, dass man durch Übergang zu Polarkoordinaten erhält, dass $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\, d\lambda(x,y) \;=\; \int_{[0,2\pi]} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-r^2/2} r\, d\lambda(r)\right] d\lambda(\theta) \;=\; 2\pi$.)

34. (2 Punkte)

    Berechnen Sie

    $$\int_{[0,1]} \left[\int_{[x,1]} e^{-y^2/2}\, d\lambda(y)\right] d\lambda(x)$$

    und begründen Sie, dass Sie so vorgehen dürfen!