**Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018**

Blatt 10, Abgabe: 20.06.2018 (vor der Übung)

35. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum und $f\colon \Omega \to (0, \infty]$ sei $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}})$-messbar.

    Zeigen Sie, dass aus $\int_A f \, d\mu = 0$ für $A \in \mathcal{A}$ folgt, dass $\mu(A) = 0$ gilt!

36. (2+2 Punkte)

    Gegeben seien ein beliebiger Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ ($\nu$ ist nicht notwendigerweise $\sigma$-endlich) und $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, wobei $\mu$ das Abzählmaß auf $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ ist (d.h., $\mu(A) = \operatorname{card}(A)\ \forall A \subseteq \mathbb{N}$).

    Zeigen Sie, dass

    (i) $2^{\mathbb{N}} \otimes \mathcal{A} = \{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\} \times A_n\colon\ A_n \in \mathcal{A}\}$,

    (ii) das Produktmaß $\pi = \mu \otimes \nu$ ist eindeutig bestimmt!

37. (2 Punkte)

    Auf einem beliebigen messbaren Raum $(\Omega, 2^{\Omega})$ seien $P$ ein diskretes W-Maß und $\mu$ das Abzählmaß.

    Zeigen Sie (ohne Bezugnahme auf Satz 3.2 aus der VL), dass eine Funktion $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$P(A) = \int_A f \, d\mu \qquad \forall A \subseteq \Omega\ !$$

38. (3 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein beliebiger Maßraum und $\nu$ ein beliebiges endliches Maß. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

    (i) $\nu \ll \mu$,

    (ii) Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass aus $\mu(A) < \delta$ stets $\nu(A) < \epsilon$ folgt!

    (Hinweis: Beweisen Sie [(i)$\Longrightarrow$(ii)] indirekt und nehmen Sie an, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ existieren mit $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ und $\nu(A_n) \geq \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie dann $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)$ und $\nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)$, wobei $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_n$ ist.)