Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018
Blatt 11, Abgabe: 27.06.2018 (vor der Übung)

39. (1+1 Punkte)

 (i) Geben Sie einen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und Maße ν und μ an, sodass $\nu \ll \mu$ gilt, aber ν keine Dichte bezüglich μ besitzt!
 (ii) Geben Sie einen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ und Maße ν und μ an, sodass ν Dichten f_1 und f_2 bezüglich μ besitzt mit $\mu(\{\omega : f_1(\omega) \neq f_2(\omega)\}) \neq 0$!

 (Hinweis: μ darf dann weder endlich noch σ-endlich sein.)

40. (2+2 Punkte)
 Es sei

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right),$$

 wobei die Matrix $\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ positiv definit ist, d.h., $(X_1, X_2)'$ besitzt eine Dichte p mit

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}' \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}\right).$$

 Berechnen Sie

 (i) die Randdichte p_{X_2},
 (ii) die bedingte Dichte $p_{X_1|X_2}$!

 (Hinweis: Nutzen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}-\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21}} & -\frac{\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}}{\sigma_{11}-\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21}} \\ -\frac{\sigma_{21}\sigma_{22}^{-1}}{\sigma_{11}-\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21}} & \sigma_{22}^{-1} + \frac{\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\ \sigma_{21}\sigma_{22}^{-1}}{\sigma_{11}-\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21}} \end{pmatrix}$$

 gilt!)

41. (1+3 Punkte)
 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein W-Raum, $X\colon \Omega \to [0, \infty]$ sei $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{B}})$-messbar und $Y\colon \Omega \to \Omega_Y$ sei $(\mathcal{A} - \mathcal{A}_Y)$-messbar. ($\Omega_Y$ ist nicht notwendigerweise endlich oder abzählbar.) $y \in \Omega_Y$ sei so, dass $\{y\} \in \mathcal{A}$ und $P(Y = y) > 0$.
 Zeigen Sie:

 (i) $P^{X|Y=y}\colon \bar{\mathcal{B}} \to [0, 1]$ mit $P^{X|Y=y}(B) = P(X \in B \mid Y = y)$ $\forall B \in \bar{\mathcal{B}}$ ist ein W-Maß auf $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$,
 (ii) Falls $X = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, wobei $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ und $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ disjunkt, so gelten:
  a) $P^{X|Y=y}(\bar{\mathbb{R}} \setminus \{0, \alpha_1, \ldots \alpha_k\}) = 0$,
  b) $E(X \mid Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x \, P^{X|Y=y}(dx)$!