Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018

Blatt 12, Abgabe: 04.07.2018 (vor der Übung)

42. (2 Punkte)

$X\colon (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega_X, \mathcal{A}_X)$ und $Y\colon (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega_Y, \mathcal{A}_Y)$ seien Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $P(X \in \cdot \mid Y = \cdot)$ sei eine Version der bedingten Verteilung.

Zeigen Sie, dass folgende Aussage äquivalent sind:

(i) X und Y sind stochastisch unabhängig,

(ii) für alle $C \in \mathcal{A}_X$ gilt

$$P(X \in C \mid Y = y) \;=\; P(X \in C) \qquad P^Y\text{-fast überall!}$$

43. (2+2 Punkte)

$Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$ und $U_1, U_2, \ldots$ mit $U_i \sim \text{Uniform}[0,1]$ seien unabhängige Zufallsvariable. Es sei für $t \in (0,1]$

$$X \;=\; \sum_{i=1}^{Z} \mathbb{1}(U_i \leq t).$$

(i) Wie ist die bedingte Verteilung von X unter der Hypothese $Z = z$?

(ii) Wie ist die Verteilung von X?

44. (2+1 Punkte)

(i) X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter λ.
Bestimmen Sie $P(X_1 \in \cdot \mid X_1 + X_2 = z)$!
(Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichte $p_{X_1+X_2}$ von $X_1 + X_2$ und stellen Sie dann $P(X_1 \in C, X_1 + X_2 \in D)$ in der Form $\int_D \left[\int_C \ldots \, d\lambda(x)\right] p_{X_1+X_2}(z)\, d\lambda(z)$ dar.)

(ii) $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ seien stochastisch unabhängig.
Bestimmen Sie $P(X_1 \in \cdot \mid X_1 + X_2 = z)$!