Übungsaufgaben zur VL Stochastik 2, Sommersemester 2018
Blatt 13, Abgabe: 11.07.2018 (vor der Übung)

45. (2 Punkte)
Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)^T$ besitze eine bivariate Normalverteilung, d.h.,
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right),$$
wobei die Matrix $\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ positiv definit ist. (Siehe auch Aufgabe 40.)
Geben Sie den bedingten Erwartungswert $E(X_1 \mid X_2 = x)$ und die bedingte Varianz $E((X_1 - E(X_1 \mid X_2 = x))^2 \mid X_2 = x)$ an!

46. (1+1 Punkte)
X_1 und X_2 seien unabhängige Cauchy-verteilte Zufallsvariable (d.h., mit Dichte $p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}$ und charakteristischer Funktion $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = e^{-|t|}$). Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen von

(i) $X_1 + X_2$,
(ii) $2X_1$!

47. (5 Punkte)
Es sei φ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ bzw. einer reellwertigen Zufallsvariable X.
Sind die folgenden Funktionen ebenfalls charakteristische Funktionen? Falls ja, zu welchen Verteilungen bzw. Zufallsvariablen gehören sie?

a) $\bar{\varphi}$ (die zu φ kunjugiert komplexe Funktion),
b) $\mathrm{Re}(\varphi)$ (Realteil von φ),
c) $\mathrm{Im}(\varphi)$ (Imaginärteil von φ),
d) φ^2,
e) $|\varphi|^2$.

48. (2 Punkte)
X sei eine ganzzahlige Zufallsvariable und φ sei die zugehörige charakteristische Funktion.
Zeigen Sie, dass
$$P(X = k) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t)\, dt$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt!
(Hinweis: Zerlegen Sie den Integranden in Real- und Imaginärteil und nutzen Sie, dass
$$\begin{aligned} \cos(kt)\cos(jt) + \sin(kt)\sin(jt) &= \cos((j-k)t), \\ \cos(kt)\sin(jt) - \sin(kt)\cos(jt) &= \sin((j-k)t) \end{aligned}$$
gelten.)