

Stochastik 1
WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

Ausgabetermin: 18.10.2018
Abgabetermin: 25.10.2018

1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Beim Schachspiel kann ein Turm nur horizontal und vertikal schlagen. Wir nehmen nun den allgemeineren Fall an, dass das Spielbrett aus $n \times n$ Feldern besteht.

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es n ununterscheidbare Türme auf dieses Brett zu stellen, so dass keiner den anderen bedroht?
- b) Bezeichnet A_n die gesuchte Zahl aus a), so **könnte** man wie folgt argumentieren:
Für einen Turm hat man n^2 Möglichkeiten, ihn zu platzieren; dieser bedroht dann eine Reihe und eine Spalte. Das Problem reduziert sich damit auf ein $(n-1) \times (n-1)$ -Brett mit $(n-1)$ Türmen, so dass $A_n = n^2 A_{n-1}$ ist. Dies bedeutet aber, dass

$$A_n = n^2(n-1)^2(n-2)^2 \dots 2^2 1^2 = (n!)^2.$$

Warum ist dieses **nicht** die gesuchte Lösung von a)?

Aufgabe 2. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen. Man definiere für alle $n \in \mathbb{N}$

$$B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right).$$

Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ und dass $B_n \cap B_m = \emptyset$, falls $m \neq n$.

Aufgabe 3. Es werde n -mal ein Würfel geworfen. Das Ereignis A_i , $1 \leq i \leq n$, beschreibe, dass im i -ten Wurf eine gerade Zahl geworfen wird, das Ereignis B_i , $1 \leq i \leq n$, beschreibe, dass im i -ten Wurf eine 5 oder eine 6 geworfen wird und das Ereignis C_i , $1 \leq i \leq n$, beschreibe, dass im i -ten Wurf eine Primzahl geworfen wird. Beschreiben Sie folgende Ereignisse möglichst einfach in Worten:

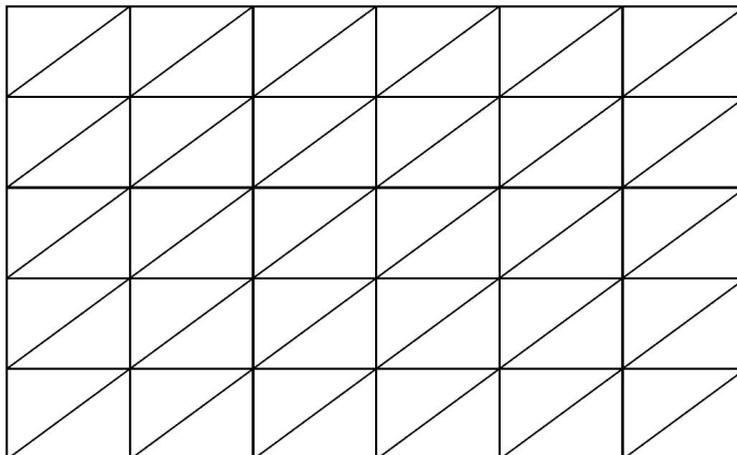
$$D_1 = A_1 \cap B_1 \cap C_1^c,$$

$$D_2 = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

$$D_3 = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup C_i),$$

$$D_4 = \left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cup B_i) \right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right).$$

- ♣ **Aufgabe 4** (4 Punkte). Um von der rechten oberen Ecke in die linke untere Ecke zu gelangen, darf man nur nach links, unten und schräg nach links-unten laufen. Wie viele verschiedene Wege gibt es?



Plan der Wege

- ♣ **Aufgabe 5** (4 Punkte). Eine Urne enthält schwarze und weiße Kugeln. Es werden n Kugeln gezogen und das Ereignis A_i , $1 \leq i \leq n$, tritt ein, wenn die i -te Kugel weiß ist. Drücken Sie folgende Ereignisse mit Hilfe von A_i aus:

$$B_1 = \{\text{mindestens eine Kugel ist weiß}\},$$

$$B_2 = \{\text{genau eine Kugel ist weiß}\},$$

$$B_3 = \{\text{alle Kugeln haben dieselbe Farbe}\},$$

$$B_4 = \{\text{mindestens } k \text{ Kugeln sind weiß}\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

- ♣ **Aufgabe 6** (4 Punkte). Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Abgabetermin: Die mit ♣ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.