Stochastik 1

WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

Ausgabetermin:	25.10.2018
Abgabetermin:	01.11.2018

2. Übungsblatt

Aufgabe 1. In einer Urne befinden sich schwarze und weiße Kugeln. Sei $\alpha > 0$ das Verhältnis zwischen der Anzahl der schwarzen Kugeln und der Anzahl der weißen Kugeln. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim Ziehen (ohne Zurücklegen) aller Kugeln aus der Urne die letzte Kugel schwarz ist.

Aufgabe 2. In einem Hörsaal befinden sich 20 Studenten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben, wenn wir Schaltjahre außer Acht lassen und folglich annehmen, dass für jeden Studenten unabhängig von den anderen die Wahrscheinlichkeit an einem bestimmten Tag Geburtstag zu haben $\frac{1}{365}$ beträgt?

Aufgabe 3.

a) Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren auf derselben Menge Ω. Sind die Familien

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{A}_1 \text{ und } A \in \mathcal{A}_2\},$$
$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{A}_1 \text{ oder } A \in \mathcal{A}_2\},$$

ebenfalls σ-Algebren?

b) Sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$. Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{N}$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Glücksspirale: Eine 7-stellige Glückszahl, bestehend aus den Ziffern $0, \ldots, 9$, wird gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung von '4444444' und die von '1234567', falls die Glückszahl ermittelt wird, indem

a) aus einem Behälter mit 70 Kugeln (7 je Ziffer) nacheinander 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden;

b) aus 7 Behältern mit je 10 Kugeln (1 je Ziffer) nacheinander je eine Kugel gezogen wird.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Gegeben seien die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}(A) = 0.5; \quad \mathbf{P}(B) = 0.25; \quad \mathbf{P}(C) = 0.15; \quad \mathbf{P}(A \cap B) = 0.125;$$
$$\mathbf{P}(A \cap C) = 0.06; \quad \mathbf{P}(B \cap C) = 0.075; \quad \mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0.03.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der zufälligen Ereignisse

a) $A \cup C$,

b) $A \cup B \cup C$,

c) $A^c \cap B^c \cap C$,

d) $(A^c \cap B^c) \cup C$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$, und $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n$.

a) Zeigen Sie das Additionstheorem für drei Ereignisse

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbf{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

b) Beweisen Sie,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} \mathbf{P}(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k})\right].$$

Abgabetermin: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.