

Stochastik 1
WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

| |
|---------------------------|
| Ausgabetermin: 01.11.2018 |
| Abgabetermin: 08.11.2018 |

3. Übungsblatt

Aufgabe 1.

- a) Eine Versicherung hat ermittelt, dass bei Verkehrsunfällen von Autofahrern, die angegurtet waren, nur 8 Prozent Kopfverletzungen erlitten haben. Bei nicht angeschnallten Fahrern trugen 62 Prozent keine Kopfverletzungen davon. Es kann davon ausgegangen werden, dass 15 Prozent aller Autofahrer keinen Gurt anlegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach einem Unfall mit Kopfverletzung eingelieferter Autofahrer keinen Gurt trug?
- b) Zwei Medikamente A, B werden in den Städten 1, 2 getestet. In Stadt 1 werden von 16 Patienten, die A nehmen, 4 gesund und von 40, die B nehmen, werden 11 gesund. In Stadt 2 ist das Verhältnis 29/40 für A beziehungsweise 12/16 für B. Man weise nach, dass in beiden Städten B erfolgreicher ist als A (d.h. die Behandlung mit B führt wahrscheinlicher zur Heilung als die Behandlung mit A), aber falls die Städte zusammengefasst werden, A erfolgreicher ist. Man beschreibe dieses Paradoxon mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2.

- a) Der französische Mathematiker De Méré überlegte sich, dass es beim Wurf mit drei nicht unterscheidbaren fairen Würfeln genau sechs Möglichkeiten gibt, die Augensumme 11 bzw. 12 zu erzielen. Hieraus folgerte er, beide Ereignisse hätten die gleiche Wahrscheinlichkeit, fand dies aber in der Praxis nicht bestätigt. Worin bestand sein Trugschluss? Geben Sie für das obige Experiment einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die beiden Ereignisse.
- b) Ein milder Lehrer ermittelt seine Noten, indem er dreimal würfelt und die kleinste Augenzahl nimmt. Stellen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Zufallsexperiment auf und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für jede Note.

▲ Aufgabe 3 (4 Punkte für b) und c)).

- a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie für $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

- b) Eine Urne enthält 3 weiße und 7 schwarze Kugeln. Zwei Spieler ziehen Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen. Der Spieler, der als erster eine weiße Kugel gezogen hat, gewinnt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der den ersten Zug macht, gewinnt.
- c) Am Anfang befinden sich in einer Urne N Kugeln, k davon sind weiß und $N - k$ schwarz. Es wird eine Kugel zufällig gezogen. Anschließend wird diese und eine weitere Kugel derselben Farbe zurückgelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit bei 7-maligem Ziehen genau 5 weiße und 2 schwarze Kugeln zu ziehen.

♣ **Aufgabe 4** (4 Punkte). Von drei Maschinen gleichen Typs werden von der ersten 20%, von der zweiten 30% und von der dritten 50% der Gesamtproduktion hergestellt. Erfahrungsgemäß entstehen bei der ersten Maschine 5%, bei der zweiten 4% und bei der dritten 2% Ausschuss.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein der Gesamtproduktion zufällig entnommenes Teil Ausschuss?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gefundenes Ausschussteil auf der zweiten Maschine gefertigt wurde?
- c) Um die Qualität zu verbessern, soll die erste Maschine gegen eine neue ausgetauscht werden. Welche Ausschussquote darf die neue Maschine höchstens haben, damit die Gesamtausschusswahrscheinlichkeit (siehe a)) 2,5% nicht übersteigt?

♣ **Aufgabe 5** (2 Punkte für b)).

a) Es seien A und B Ereignisse. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i) A und B sind unabhängig.
- (ii) A^c und B sind unabhängig.
- (iii) A^c und B^c sind unabhängig.

b) Sie werfen einen weißen und einen schwarzen Würfel. Betrachten Sie folgende drei Ereignisse

$$\begin{aligned}A_1 &= \{\text{Der weiße Würfel zeigt 5 oder 6}\}, \\A_2 &= \{\text{Die Augensumme ist durch 3 teilbar}\}, \\A_3 &= \{\text{Die Augensumme ist durch 4 teilbar}\}.\end{aligned}$$

Sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3 vollständig unabhängig?

♣ **Aufgabe 6** (2 Punkte für b)).

Es sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Ereignissen. Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^c) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_i) = 1.$$

b) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^c) = \infty \Rightarrow P(\liminf A_i) = 0.$$

Abgabetermin: Die mit ♣ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.