

Stochastik 1
WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

Ausgabetermin: 08.11.2018
Abgabetermin: 15.11.2018

4. Übungsblatt

Aufgabe 1. X hat die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}x^2, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

und $Y := X^2$. Bestimmen Sie

- a) $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$,
- b) $\mathbb{P}(1 \leq X < 2)$,
- c) $\mathbb{P}(X \leq 2Y)$,
- d) $\mathbb{P}(X + Y \leq \frac{3}{4})$,
- e) die Verteilungsfunktion F_Z von $Z := \sqrt{X}$.

Aufgabe 2. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{N} und $0 < \mathbb{P}(X = k) < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man zeige: X ist genau dann $\text{Geo}(p)$ -verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$, falls für X die *Gedächtnislosigkeit* gilt, d.h.

$$\mathbb{P}(X > j + k | X > k) = \mathbb{P}(X > j), \quad j, k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3. Ein Kinobesitzer erklärt, er werde der ersten Person in der Schlange vor seiner Kinokasse freien Einlass gewähren, die denselben Geburtstag hat wie irgendjemand aus der Gruppe derjenigen, die vor ihr bereits eine Karte gekauft haben. Ermitteln Sie den günstigsten Platz in der Warteschlange unter der Annahme, dass die Geburtstage der Wartenden unabhängig und gleichverteilt sind.

- ♣ **Aufgabe 4** (4 Punkte). Auf einem Tisch stehen zwei Urnen mit jeweils zehn Kugeln darin. Man werfe eine faire Münze. Bei Kopf zieht man ohne Zurücklegen aus der ersten Urne eine Kugel und bei Zahl aus der anderen. Das wird wiederholt bis eine Urne leer ist. Wie wahrscheinlich ist das Zurückbleiben von k Kugeln, $k \in \{1, \dots, 10\}$, in der anderen Urne?
- ♣ **Aufgabe 5** (4 Punkte). In einer Geldbörse befinden sich N Münzen, dabei sei N Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Jede Münze wird einmal geworfen und zeigt mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ Kopf. Zeigen Sie, dass die Gesamtanzahl von Münzen, die Kopf zeigen, Poisson-verteilt ist mit Parameter λp .

♣ **Aufgabe 6** (4 Punkte). Welche Verteilung ist sinnvollerweise zu verwenden?

- a) Die Durchführung eines bestimmten Versuchs dauert eine Stunde. Dabei tritt ein erwünschter Effekt mit einer Wahrscheinlichkeit von 13% auf. Welche Zeit ist zu veranschlagen, um den Effekt mit einer Sicherheit von 98% mindestens einmal zu beobachten?
- b) Ein Bäcker hat 100 frische Brote und 20 altbackene, die er 'auf gut Glück' darunter mischt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde, der drei Brote kauft, wenigstens ein altbackenes erhält.
- c) Ein Arbeiter bedient 16 Maschinen zugleich. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Maschinen in einem bestimmten Zeitintervall seine Aufmerksamkeit erfordert, sei 25%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 4 Maschinen in diesem Zeitintervall seine Aufmerksamkeit erfordern?
- d) Um zu entscheiden, ob eine Warenlieferung angenommen werden soll, wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 5$ entnommen. Enthält die Stichprobe kein fehlerhaftes Teil, so wird die Lieferung angenommen, enthält sie mehr als ein Ausschusstück, wird die Lieferung zurückgewiesen. Enthält sie hingegen genau ein Ausschusstück, so wird eine weitere Stichprobe genommen und die Warenlieferung abgewiesen, falls diese zweite Stichprobe nicht ausschussfrei ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung, wenn ihr Ausschussanteil 1% beträgt?

Hinweis: Es ist nicht nötig die Aufgaben komplett zu lösen. Geben Sie stattdessen eine geeignete Verteilung und gegebenenfalls die zugehörigen Parameter an.

Abgabetermin: Die mit ♣ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.