Stochastik 1

WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

Ausgabetermin:	15.11.2018
Abgabetermin:	22.11.2018

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die *Eulersche φ-Funktion*, d.h. $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(n)$ ist die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$, falls $n \geq 2$. Ist $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ die Primfaktorzerlegung von n mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ und geeigneten Potenzen $k_i \in \mathbb{N}$, dann zeigen Sie:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ereignisse $A_i = \{p_i, 2p_i, \dots, n\}$, $1 \leq i \leq m$, in Ω_n.

Aufgabe 2. Beim Eurojackpot werden 5 aus 50 Zahlen und zusätzlich noch 2 aus 10 Zusatzzahlen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in 10 Jahren (= 520 Wochen) einen Großgewinn (Vierer mit zwei Zusatzzahlen oder Fünfer) zu erzielen, wenn man jede Woche genau einmal tippt?

Aufgabe 3. Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit bekannten Verteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_n$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von

a) $Y := \max(X_1, \dots, X_n)$,

b) $Z := \min(X_1, \dots, X_n)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sie spielen ein einfaches Wettspiel um Geld. Dabei werfen sie wiederholt eine Münze, die mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \in (0, 1)$ *Kopf* zeigt. Wenn Sie *Kopf* werfen, erhalten Sie einen Euro, bei *Zahl* müssen Sie einen Euro abgeben. Es sei G_n Ihr Nettogewinn nach n Würfen. Zeigen Sie

a) Wenn $p \neq \frac{1}{2}$, dann ist $\mathbb{P}(G_n \text{ ist unendlich oft } 0) = 0$.

b) Wenn $p > \frac{1}{2}$, dann ist $\mathbb{P}(G_n \to \infty) = 1$

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.**

a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$, sei $S_{n,p}$ eine binomialverteilte Zufallsvariable zu den Parametern n und p. Des Weiteren sei für alle $\lambda > 0$ die Zufallsvariable X_λ Poisson-verteilt zum Parameter λ. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(S_{n, \frac{\lambda}{n} \wedge 1} = k) \to \mathbb{P}(X_\lambda = k),\ n \to \infty.$$

b) Eine Solarzelle in einem Solarmodul genüge mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.0002 nicht der Qualitätskontrolle. Man benutze obige Approximation, um die Wahrscheinlichkeit, dass

   a) höchstens zwei von 5000,
   b) genau eins von 1000,
   c) keines von 100

   dieser Solarzellen bei einer Kontrolle beanstandet wird, approximativ und falls möglich exakt zu berechnen.

Aufgabe 6 (4 Punkte). In einem See befindet sich eine unbekannte Zahl von Fischen. Man entnehme dem See zufällig 20 Fische, markiere diese und setze sie danach wieder in den See. Nach einiger Zeit entnehme man wiederum zufällig 50 Fische. Von diesen 50 Fischen sind 4 markiert.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für diese Beobachtung, vorausgesetzt im Teich befinden sich insgesamt 100, 200, 300 bzw. 400 Fische?

b) Bei welcher Anzahl von Fischen im Teich wird die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses maximal?

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.