Stochastik 1

WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

Ausgabetermin:	29.11.2018
Abgabetermin:	06.12.2018

7. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Es sei X eine diskrete nichtnegative Zufallsvariable. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

b) Betrachten Sie die Zufallsvariable X mit folgender Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/\lambda}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$ ist. Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion f_X und $\mathbb{E}X$.

Aufgabe 2. Die Verteilungsfunktion F einer absolut stetigen Zufallsvariable X sei gegeben durch

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda t}, & t \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda t}, & t > 0, \end{cases}$$

für ein festes $\lambda > 0$. Berechnen Sie zuerst die zu F gehörende Wahrscheinlichkeitsdichte f und bestimmen dann $\mathbf{E}[3X-2]$ und $\operatorname{Var}(3X-2)$.

Aufgabe 3. Es sei $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von

a) $Y_1 = e^{-X}$,

b) $Y_2 = -3X + 4$,

c) $Y_3 = \lfloor X \rfloor + 1$.

Hinweis: Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bei der automatischen Abfüllung von $0,5l$-Milchflaschen wird das abgefüllte Flüssigkeitsvolumen F als normalverteilt mit den Parametern $\mu_F = 500cm^3$ und $\sigma_F = 5cm^3$ angenommen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine $0,5l$-Flasche weniger als $490cm^3$ enthält?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Flasche überläuft, wenn das Volumen der Milchflasche unabhängig vom Flüssigkeitsvolumen normalverteilt mit den Parametern $\mu_V = 510ml$ und $\sigma_V = 2ml$ ist?

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es sei X eine Zufallsvariable, welche nur Werte im Intervall $[b,c]$ annimmt. Zeigen Sie, dass

(a) $\operatorname{Var}X \leq \frac{1}{4} \cdot (c-b)^2$,

(b) $\operatorname{Var}X = \frac{1}{4} \cdot (c-b)^2 \Leftrightarrow \mathbf{P}(X=b) = \mathbf{P}(X=c) = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Beachten Sie dazu, dass $\operatorname{Var}X = \operatorname{Var}(X+a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Sei X eine allgemeine β–verteilte Zufallsvariable auf dem Intervall (a, b) mit Parametern $p, q > 0$, d.h. X hat die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(p,q)(b-a)^{p+q-1}}(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}\mathbb{1}_{(a,b)}(x),$$

wobei $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,\mathrm{d}y$. Zeigen Sie, dass f_X tatsächlich eine Dichtefunktion ist und bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Hinweis: Benutzen Sie falls notwendig die Eigenschaften der Γ–Funktion um die auftretenden Terme geeignet zu vereinfachen.

Tabelle der Standardnormalverteilung

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.50000	.50398	.50797	.51196	.51595	.51993	.52392	.52790	.53188	.53585
0.1	.53982	.54379	.54775	.55171	.55567	.55961	.56355	.56749	.57142	.57534
0.2	.57925	.58316	.58706	.59095	.59483	.59870	.60256	.60641	.61026	.61409
0.3	.61791	.62171	.62551	.62930	.63307	.63683	.64057	.64430	.64802	.65173
0.4	.65542	.65909	.66275	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68438	.68793
0.5	.69146	.69497	.69846	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72574	.72906	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75174	.75490
0.7	.75803	.76114	.76423	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78523
0.8	.78814	.79102	.79389	.79673	.79954	.80233	.80510	.80784	.81057	.81326
0.9	.81593	.81858	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83397	.83645	.83891
1.0	.84134	.84375	.84613	.84849	.85083	.85314	.85542	.85769	.85992	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87285	.87492	.87697	.87899	.88099	.88297
1.2	.88493	.88686	.88876	.89065	.89251	.89435	.89616	.89795	.89972	.90147
1.3	.90319	.90490	.90658	.90824	.90987	.91149	.91308	.91465	.91620	.91773
1.4	.91924	.92073	.92219	.92364	.92506	.92647	.92785	.92921	.93056	.93188
1.5	.93319	.93447	.93574	.93699	.93821	.93942	.94062	.94179	.94294	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94844	.94949	.95052	.95154	.95254	.95352	.95448
1.7	.95543	.95636	.95728	.95818	.95907	.95994	.96079	.96163	.96246	.96327
1.8	.96406	.96485	.96562	.96637	.96711	.96784	.96855	.96925	.96994	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97319	.97381	.97441	.97500	.97558	.97614	.97670
2.0	.97724	.97778	.97830	.97882	.97932	.97981	.98030	.98077	.98123	.98169
2.1	.98213	.98257	.98299	.98341	.98382	.98422	.98461	.98499	.98537	.98573
2.2	.98609	.98644	.98679	.98712	.98745	.98777	.98808	.98839	.98869	.98898
2.3	.98927	.98955	.98982	.99009	.99035	.99061	.99086	.99110	.99134	.99157
2.4	.99180	.99202	.99223	.99245	.99265	.99285	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99429	.99445	.99461	.99476	.99491	.99505	.99520
2.6	.99533	.99547	.99560	.99573	.99585	.99597	.99609	.99620	.99631	.99642
2.7	.99653	.99663	.99673	.99683	.99692	.99702	.99710	.99719	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99759	.99767	.99774	.99781	.99788	.99794	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99824	.99830	.99835	.99841	.99846	.99851	.99855	.99860

Abgabetermin: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.