# Stochastik 1

WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

| | |
|---|---|
| Ausgabetermin: | 13.12.2018 |
| Abgabetermin: | 20.12.2018 |

## 9. Übungsblatt

**Aufgabe 1.** Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen zum Parameter $\frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die Verteilung von

$$Z := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}.$$

**Aufgabe 2.** Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann gilt

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$,

(ii) $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \cdot Y$,

(iii) falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, so folgt $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$.

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion der zentrierten Normalverteilung (d.h. $\mu = 0$). Leiten Sie daraus eine Formel für das $n$–te Moment der zentrierten Normalverteilung her und beweisen Sie diese.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen.Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n := X_1^2 + X_2^2 + \dots X_n^2.$$

Zeigen Sie, dass

$$f_{Z_n}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

**Aufgabe 5** (3 Punkte)**.** Beweisen Sie folgendes Borel-Cantelli Lemma: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unabhängigen Ereignissen. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Hinweis: Betrachten Sie $S = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$.

**Aufgabe 6** (5 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Zeigen Sie, dass aus $\mathbf{E}(X_n - X)^2 \to 0$ für $n \to \infty$ die stochastische Konvergenz von $X_n$ gegen $X$ ($X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) für $n \to \infty$ folgt. Weisen Sie nach, dass die Umkehrung der Implikation im Allgemeinen selbst unter der zusätzlichen Annahme $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^2 < \infty$ nicht gilt.

b) Zeigen Sie, dass wenn $X_n$ $\mathbb{P}$-f.s. gegen $X$ konvergiert für $n \to \infty$, dann folgt daraus auch die stochastische Konvergenz von $X_n$ gegen $X$ für $X_n \to X$.
Weisen Sie nach, dass die Umkehrung der Implikation im Allgemeinen nicht gilt.

**Abgabetermin:** Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.
**Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur:** 50% der Punkte aus den Übungsserien und zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.