Stochastik 1

WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

Ausgabetermin:	20.12.2018
Abgabetermin:	10.01.2019

10. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von *iid* Zufallsvariablen gegeben durch die Dichte

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Bestimmen Sie die Verteilung von $\frac{X_1+X_2}{2}$ und folgern Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Verteilung von $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Aufgabe 2. In einer Bernoulli-Folge $X_1, X_2, \dots X_{n+1}$ mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ tritt die Serie '11' im k-ten Versuch ein, wenn $X_k = X_{k+1} = 1$. Sei $Y_k = \mathbb{1}_{\{X_k = X_{k+1} = 1\}}$ und $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

Zeigen Sie folgende Äquivalenz

$$x = p^2 \Leftrightarrow \text{ Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{Z_n}{n} - x\Big| \geq \varepsilon\Big) = 0.$$

Aufgabe 3. Die Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seien unabhängig und es gelte $\mathbb{P}(X_i = z) = \mathbb{P}(X_i = \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}$ für ein festes $z > 1$. Sei $Y_n := (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{1/\sqrt{n}}$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Var}Y_n$.

Aufgabe 4 (3 Zusatzpunkte)**.** Seien $a_1, \dots a_n$ positive reelle Zahlen, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Aufgabe 5 (5 Zusatzpunkte)**.**

a) Ein Grashüpfer startet am Ursprung der Zahlengerade und hüpft bei jedem Sprung mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ um zwei Einheiten in die positive Richtung und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p = 0.4$ um eine Einheit in die negative Richtung. Bestimmen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass das Tier nach 10000 Sprüngen im Bereich $[7700, 8100]$ landet.

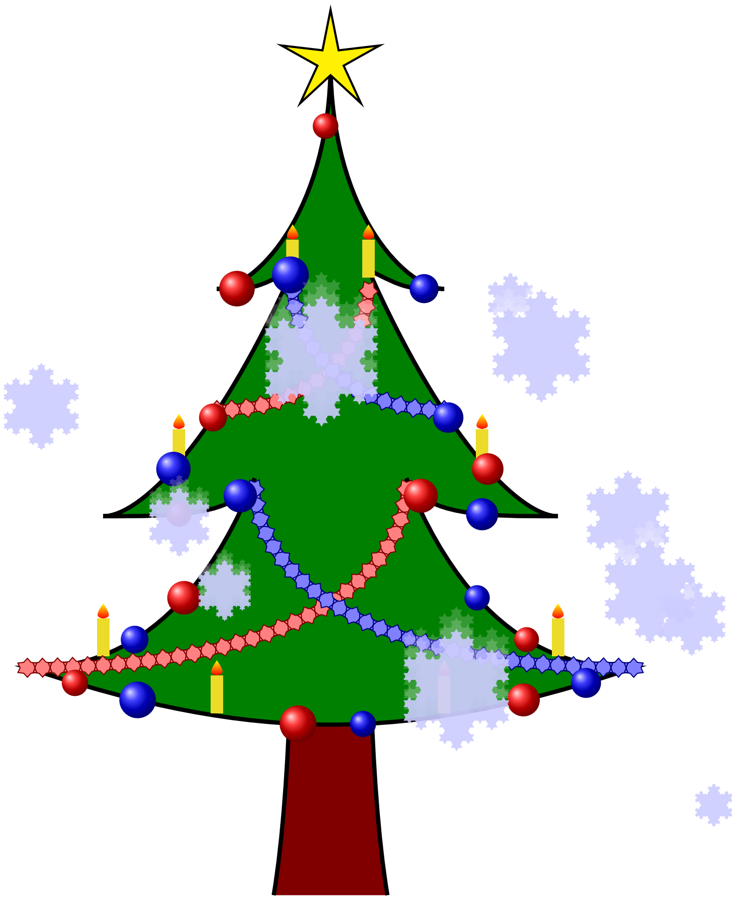
b) Sei $x \geq 0$ beliebig. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:|k-\frac{n}{2}|\leq\frac{x\sqrt{n}}{2}} \binom{n}{k} 2^{-n} = \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Hinweis: Sie können auch hier den zentralen Grenzwertsatz verwenden.

Aufgabe 6 (4 Zusatzpunkte)**.** Entgegen der landläufigen Meinung kommt der Weihnachtsmann nicht durch den Kamin in die Häuser der Kinder. Stattdessen besitzt er spezielle "Quantenentschränkungs-Geräte". Aufgrund des komplizierten Aufbaus neigen diese jedoch zum Kaputtgehen. Wir gehen davon aus, dass die Haltbarkeit eines Geräts in Std. exponentialverteilt zum Parameter $\lambda = \frac{1}{6}$ ist. Wenn eines kaputt ist, muss der Weihnachtsmann ein neues verwenden. Er plant 24 Std. unterwegs zu sein bis jedes Kind seine Geschenke hat. Wie viele "Quantenentschränkungs-Geräte" muss der Weihnachtsmann mindestens mitnehmen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% jedes Kind seine Geschenke bekommt?

Hinweis: Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Verteilung der Summe von unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen.



Wir wünschen allen Studenten ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Jahr 2019!

Abgabetermin: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.