Stochastik 1

WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

Ausgabetermin:	10.01.2019
Abgabetermin:	17.01.2019

11. Übungsblatt

Aufgabe 1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig in einen Kreis gezeichnete Sehne länger als die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, wenn man

a) die Endpunkte der Sehne zufällig gleichverteilt auf den Kreisbogen legt?

b) den Mittelpunkt der Sehne zufällig gleichverteilt in das Kreisinnere legt?

c) den Mittelpunkt der Sehne zufällig gleichverteilt auf den Kreisdurchmesser legt?

Was fällt Ihnen dabei auf? Begründen Sie dies.

Aufgabe 2. Seien X, Y unabhängige stetige Zufallsvariablen mit Dichtefunktionen f_X, f_Y.

a) Zeigen Sie, dass $X-Y$ durch folgende Dichtefunktion gegeben ist

$$f_{X-Y}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(z+x) f_Y(x)\, dx.$$

b) Seien nun zusätzlich X und Y positiv. Zeigen Sie, dass $X \cdot Y$ durch folgende Dichtefunktion gegeben ist

$$f_{XY}(z) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f_X(x) f_Y\Big(\frac{z}{x}\Big)\, dx.$$

Aufgabe 3. Gegeben sei $D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le 1 - 2|x|\big\}$. Der Zufallsvektor (X,Y) besitze die Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c & : \quad (x,y) \in D, \\ 0 & : \quad (x,y) \notin D. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y.

d) Berechnen Sie $\mathbb{E}XY$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log(n+1)}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Der zufällige Vektor (X, Y) besitze folgende Verteilung:

$X \setminus Y$	-1	2	4	
-1				0.4
0		0.03		
1	0.06			
		0.3		

a) Ergänzen Sie in der Tabelle die Werte der Verteilung von (X, Y) bzw. der Randverteilungen von X und Y unter der Annahme, dass X und Y unabhängig sind.

b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ und $\mathbb{E}[\frac{X}{Y}]$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.**

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c\, e^{-x-y}, & y \in [2x, \infty),\ x \in [0, \infty), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit der Dichte $f_{(X,Y)}$. Berechnen Sie die Randdichten von X und Y. Sind X und Y unabhängig?

b) Seien (X, Y) die Koordinaten eines Punktes, der zufällig gleichverteilt aus der Halbkreisscheibe $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ausgewählt wird, d.h. der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \cdot \mathbb{1}_H(x, y).$$

Berechnen Sie die Randverteilungen von X und Y. Sind X und Y unabhängig?

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.