Stochastik 1

WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

Ausgabetermin:	17.01.2019
Abgabetermin:	24.01.2019

12. Übungsblatt

Aufgabe 1. In einer Urne befinden sich n Kugeln mit der Zahl „0“ und n Kugeln mit der Zahl „1“. Man zieht zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen. Es sei X der Wert der ersten Kugel und Y der Wert der zweiten Kugel.
Bestimmen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

Aufgabe 2. Können folgende Matrizen Kovarianzmatrizen sein?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

$$D = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$$

eine Kovarianzmatrix?

Aufgabe 3. Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $a > 0$. Wir definieren

$$Y = \begin{cases} X, & \text{falls } |X| > a \\ -X, & \text{falls } |X| \leq a. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(ii) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind.

(iii) Zeigen Sie, dass X und Y für eine geeignete Wahl von a unkorreliert sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien X, Y Zufallsvariablen mit endlichem zweiten Moment und $\mathrm{Var}(X) > 0$ sowie $\mathrm{Var}(Y) > 0$. Bestimmen Sie die Regressionsgleichung von Y bezüglich X, d.h. ermitteln Sie $a^*, b^* \in \mathbb{R}$, sodass

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[Y - (a + bX)\right]^2 = \mathbb{E}\left[Y - (a^* + b^*X)\right]^2$$

und zeigen Sie weiterhin

$$\mathbb{E}\left[Y - (a^* + b^*X)\right]^2 = Var(Y)\left(1 - \rho(X,Y)^2\right).$$

Aufgabe 5 (2 Punkte). Der zwei-dimensionale zufällige Vektor (X, Y) ist gemäß der Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{E}\sqrt{X^2+Y^2}$.

Aufgabe 6 (6 Punkte). Es seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} \exp\left[-\left(4x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2 - 2y + 4\right)\right], \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie, dass der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ normalverteilt ist.

(ii) Bestimmen Sie den Erwartungsvektor $\mathbb{E}X$ und die Kovarianzmatrix.

(iii) Wie ist die Verteilung von X_1 und X_2?

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.