Stochastik 1

WS 2018/2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Robert Hesse, Verena Köpp

Ausgabetermin: 24.01.2019 Besprechung in den Übungen am 28.01.2019 und 30.01.2019

13. Übungsblatt

Aufgabe 1. (a) Sei Y eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable mit $Y \sim \mathcal{N}(a, S)$ und $c = (c_1, \ldots, c_d)^T \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann

$$c^T Y = c_1 Y_1 + \ldots c_d Y_d \sim \mathcal{N}(c^T a, c^T Sc).$$

(b) Seien X_1 und X_2 unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von

$$Y_1 := \sqrt{-2 \ln X_1} \cos(2\pi X_2),$$
$$Y_2 := \sqrt{-2 \ln X_1} \sin(2\pi X_2).$$

Hinweis: Dieses Verfahren heißt Box-Muller Methode und kann zur Erzeugung von standardnormalverteilten Zufallszahlen genutzt werden.

Aufgabe 2. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Um das Integral $I := \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$ mit der Monte-Carlo-Methode zu berechnen, betrachtet man $I_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, jeweils auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind. Bestimmen Sie $\mathbb{E}I_n$ und $\mathrm{Var}I_n$. Zeigen Sie, dass I_n ein konsistenter Schätzer von I ist.

Aufgabe 3. Eine weitere Methode zur Parameterschätzung ist die Maximum-Likelihood Schätzung. Der ursprüngliche Gedanke bei der Maximum-Likelihood Schätzung ist sehr einfach. Man betrachte ein Experiment mit diskreter Verteilung und unbekanntem Parameter θ, d.h.

$$\mathbb{P}\left(X = x_i, \theta\right) = p_i\left(\theta\right), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Gegeben sei die Stichprobe $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist der *Maximum–Likelihood–Schätzer* θ^* für θ jenes θ, sodass die Wahrscheinlichkeit für die konkrete Stichprobe *maximal* wird:

$$\theta^* = \arg\max_\theta \mathbb{P}\left(X_1 = \xi_1, X_2 = \xi_2, \ldots, X_n = \xi_n, \theta\right).$$

(a) Sei nun X_i Poisson-verteilt mit unbekannten Parameter λ. Bestimmen Sie den Maximum–Likelihood Schätzer λ^* für λ bei gegebener Stichprobe $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Woher kennen Sie den Schätzer aus (a)?

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> zweimaliges Vorrechnen an der Tafel.