



Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2018/19 Übungsserie 4

Vorlesung: B. Schmalfuß

Übung: T. Bock, S. Engelhardt, C.C.M. Ritsch, B. Schmalfuß

H-Aufgabe 1 (4 Punkte)

Man würfelt mit einer zufälligen Anzahl von N Würfeln, wobei $N \in \mathbb{N}$. Es ist bekannt, dass $\mathbb{P}(N = i) = \frac{1}{2^i}$, $i \in \mathbb{N}$. Mit S wird die Summe der Zahlen auf den N Würfeln bezeichnet. Man berechne:

- $\mathbb{P}(N = 2 | S = 3)$
- $\mathbb{P}(S = 4 | N \text{ gerade})$
- $\mathbb{P}(S \leq 4 | N \geq 6)$

H-Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie für $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Aufgabe 3

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq -4 \\ \frac{a(x+4)}{|x|+b}, & \text{falls } x > -4. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, sodass F eine Verteilungsfunktion darstellt.

H-Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariable X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie $P(X = 0)$, $P(X > 0)$ und $P(X < 0)$.

Aufgabe 5

Die Zufallsvariable X hat die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{x}{2}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

und $Y = X^2$. Bestimmen Sie

a) $\mathbb{P}(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$;

b) $\mathbb{P}(Y \leq X)$;

c) $\mathbb{P}(X + Y \leq \frac{3}{4})$;

d) die Verteilungsfunktion von $Z = \sqrt{X}$.

Aufgabe 6

- a) Ein Fahrschüler kann durch seine intensive Vorbereitung auf die theoretische Prüfung von den 900 verschiedenen Fragen 800 sicher beantworten. Für die Prüfung werden nun 30 von 900 zufällig ausgewählt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Schüler alle Fragen korrekt beantworten?
- b) Bei einer Statistik-Prüfung wird einem Prüfling unter anderem ein Bogen mit 20 Aufgaben vorgelegt. Jede dieser Aussagen ist als richtig (R) oder falsch (F) zu kennzeichnen. Dieser Teil der Prüfung ist bestanden, wenn mindestens 15 Aussagen richtig gekennzeichnet wurden.
Der Prüfling kennzeichnet jede Aussage zufällig mit R oder F (d.h. jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,5). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er die Prüfung besteht?
- c) Wenn in einer Familie mit Wahrscheinlichkeit 0,9 mindestens ein Junge vorhanden sein soll, wieviele Kinder müsste eine solche Familie *mindestens* besitzen?
Dabei soll die Geburt eines Jungen genauso wahrscheinlich sein, wie die Geburt eines Mädchens.