Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2018/19
Übungsserie 6

Vorlesung: B. Schmalfuß

Übung: T. Bock, S. Engelhardt, C.C.M. Ritsch, B. Schmalfuß

Aufgabe 1

a) Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit bekannten Verteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_n$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von

- $Y := \max(X_1, \dots, X_n)$,
- $Z := \min(X_1, \dots, X_n)$.

b) Es seien X, Y unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen zu den Parametern $\lambda, \mu > 0$. Welche Verteilung besitzt $Z := \max\{X, Y\}$?

H-Aufgabe 2(6 Punkte)

a) Es gelte $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Weiter bezeichne $[X]$ den ganzzahligen Anteil von X (Abrundung auf nächst kleinere ganze Zahl, falls X keine ganze Zahl ist, $[X]$=X, falls X eine ganze Zahl ist. Für $Y := [X] + 1$ und $k \in \mathbb{N}$ berechne man $\mathbb{P}(Y = k)$. Was kann über die Verteilung von Y gesagt werden?

b) Betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{, für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Man zeige, dass f eine Dichte ist und gebe die zugehörige Verteilungsfunktion an.

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$. Wie lauten die Verteilungsfunktionen von

a) $Y_1 = aX + b$, für $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig,

b) $Y_2 = X^2$,

c) $Y_3 = \max\{X, 1 - X\}$

Bestimmen Sie dafür jeweils zuerst die Verteilungsfunktion $F_i(x) = \mathbb{P}(Y_i \leq x)$ für $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, und berechnen Sie dann die Dichte der Verteilung.

Aufgabe 4
Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + cx & \text{, für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + kx & \text{, für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Man bestimme die Konstante c so, dass f eine Dichte ist und zeige, dass es keine Konstante k gibt, für die g eine Dichte darstellt.

H-Aufgabe 5(6 Punkte)

a) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable zu dem Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $Y := \log(X)$.

b) Sei $a > 0$ fix. Gegeben sei eine auf $[0, a]$ gleichverteilte Zufallsvariable K. Berechnen Sie die Dichtefunktion für das zufällige Volumen eines Würfels mit Kantenlänge K.

Aufgabe 6 Die Laufzeit T eines stochastischen Suchverfahrens auf einer Workstation werde als λ-exponentialverteilt angenommen. Weiter sei bekannt, dass die mittlere Laufzeit 70 Sekunden beträgt.
a) Man gebe den Parameter λ der Exponentialverteilung an.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällige Lauf des Verfahrens

i) genau 50 Sekunden bzw.

ii) zwischen 60 und 70 Sekunden

dauert?
c) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit von ii), wenn das Verfahren bereits 30 Sekunden läuft?

Abgabe: 29.11.2018 in der **Vorlesung**