



Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2018/19 Übungsserie 8

Vorlesung: B. Schmalfuß

Übung: T. Bock, S. Engelhardt, C.C.M. Ritsch, B. Schmalfuß

Aufgabe 1

Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in der Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen \mathbb{Z}^+ . Man zeige, dass

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > i)$$

gilt.

H-Aufgabe 2 (3 Punkte)

Man zeige, dass die Varianz einer exponentialverteilten Zufallsvariablen Z mit Parameter $\lambda > 0$ gegeben ist durch

$$V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Aufgabe 3

Eine Zufallsvariable X sei

- gleichverteilt auf $[-1, 1]$,
- exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$,
- normalverteilt mit den Parametern μ, σ .

Man bestimme jeweils Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen

$$Y = a + bX \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}, b > 0.$$

Hinweis: Benutze Aufgabe 2 für Aufgabe 3b).

H-Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von

- $Y_1 = e^{-X}$,
- $Y_2 = -3X + 4$.

Hinweis: Benutze wieder Aufgabe 2.

Aufgabe 5

- a) Die zufällige Zeit X bis zum Ausfall eines Bauteils (gemessen in Betriebsstunden) werde durch die Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/1000} & , \text{ für } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ für } t < 0 \end{cases}$$

beschrieben. Berechnen Sie das 0.9-Quantil.

- b) Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x < -1 \\ 1 - |x| & , \text{ für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ für } x > 1. \end{cases}$$

Man berechne die Verteilungsfunktion und gebe die Quantile z_q für $q = 0.25, 0.5$ und 0.75 an.

H-Aufgabe 6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für $q = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ die Quantile z_q für die Verteilung mit zugehöriger Dichtefunktion

$$f(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}$$

für alle $z \in \mathbb{R}$.