Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2018/19
Übungsserie 10

Vorlesung: B. Schmalfuß

Übung: T. Bock, S. Engelhardt, C.C.M. Ritsch, B. Schmalfuß

Weihnachtsaufgaben: Die Punkte der H-Aufgaben dieser Serie werden am Ende des Semesters zu der Gesamtzahl der H-Punkten aus den anderen Serien dazu addiert. Damit haben Studierende die Möglichkeit, fehlende Punkte bezüglich der Prüfungszulassung auszugleichen. Bei den H-Aufgaben dieser Serie handelt es sich um Aufgaben aus alten Prüfungsklausuren.

Aufgabe 1

(a) Man berechne die momenterzeugende Funktion $M_X(t)$ einer exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Was ist der Definitionsbereich von $M_X(t)$? Man gebe mit Hilfe von $M_X(t)$ Erwartungswert, Varianz und das dritte Moment von X an.

(b) Man bestimme die momenterzeugende Funktion einer Bernoulli verteilten Zufallsvariablem Z.

(c) Es seien X_i unabhängige Zufallsvariablen mit den momenterzeugenden Funktionen $M_{X_i}(t)$. Weiterhin sei

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Dann gilt

$$M_{S_n}(z) = M_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(t),$$

wobei wir annehmen, dass der Definitionsbereich von $M_{X_i}(t)$ die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist. Mit Hilfe dieser Aussage berechne man die momenterzeugende Funktion der Binomialverteilung.

Aufgabe 2

In einem Krankenhaus werden n Babys in einer bestimmten Woche geboren. Es soll davon ausgegangen werden, dass keine Mehrlingsgeburten vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens oder eines Junges ist jeweils $\frac{1}{2}$ und diese Ereignisse sind unabhängig voneinander. Mit b_n soll die Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden, dass mehr als 60% der n Neugeborenen Mädchen sind.

a) Berechnen Sie b_5.

b) Beweisen Sie mittels der Tschebyshevschen Ungleichung, dass:

i) $b_{500} < b_5$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

H-Aufgabe 3 (3 Punkte)
Im 13. und 14. Jahrhundert war das Sara-Spiel verbreitet. Dabei geht es darum, zwei Würfel zu werfen und die richtige Augenzahl vorherzusagen. Welche Augenzahl sollte man wählen, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit zu gewinnen? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit?

H-Aufgabe 4(4 Punkte)
Ein netter Stochastik Professor vergibt Noten von 1 bis 6 mittels eines Würfels. Dabei würfelt er drei Mal und bestimmt die Note als Minimum der drei Würfelergebnisse. Man gebe die Verteilungsfunktion für diese Notenvergabe an und bestimme den Erwartungswert und die Varianz der auf diese Weise vergebenen Noten.

H-Aufgabe 5(4 Punkte)
Ein Automat fertigt Teile, deren Länge X eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu =$ 40mm und $\sigma = 0.04$mm sei. Die gefertigten Teile sind normgerecht, wenn die Länge vom Sollwert 40mm höchstens um 0.1mm abweicht.
a) Mit wieviel Prozent normgerechter Teile kann gerechnet werden?
b) In welchen Grenzen $40 - c$ und $40 + c$ liegt mit Wahrscheinlichkeit 0.95 die Länge eines gefertigten Teiles?
c) Durch eine Fehleinstellung des Automaten vergrößerte sich der Wert μ um 0.02mm, während sich σ nicht veränderte. Mit wieviel Ausschuss ist zu rechnen?

H-Aufgabe 6 (3 Punkte)
Eine Glühlampe in einer Notbeleuchtung sei ununterbrochen in Betrieb, bis sie ausfällt. Die Zufallsgröße X, die die (zufällige) Lebensdauer der Glühlampe angibt, sei exponentialverteilt. Weiter sei bekannt, dass derartige Glühlampen im Mittel eine Lebenszeit von 6000 Stunden besitzen, d.h. $X \sim \mathrm{Exp}(6000^{-1})$.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühlampe nach 6000 Stunden bereits ausgefallen ist?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühlampe, die bereits 3000 Stunden in Betrieb ist, mindestens noch weitere 3000 Stunden nicht ausfällt?
c) Entsprechend einer Sicherheitsvorschrift müssen Glühlampen einer Notbeleuchtung nach 6000 Stunden Betriebszeit ausgewechselt werden. Man gebe die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße Y an, die die Einsatzzeit (Zeit bis zur Auswechslung oder Ausfall) einer Glühlampe besitzt.

Die Lehrenden der Veranstaltung *Einführung in die Wk-Theorie* wünschen Ihnen schöne Weihnachten.

Abgabe: 10.1.2019 in der **Vorlesung**