Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2018/19
Übungsserie 11

Vorlesung: B. Schmalfuß

Übung: T. Bock, S. Engelhardt, C.C.M. Ritsch, B. Schmalfuß

Aufgabe 1
Bei einem Messvorgang wird angenommen, dass er durch eine Zufallsvariable X mit unbekanntem Erwartungswert und Varianz $V(X) = 0.01$ angemessen beschrieben werden kann.
Wie viele getrennte Messungen n (ohne gegenseitige Beeinflussung der Ergebnisse) müssen durchgeführt werden, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 der Betrag der Differenz zwischen dem empirischen Mittel der Messwerte und dem Erwartungswert kleiner als 0.02 ist?
Nutzen Sie dabei

a) die Tschebychev-Ungleichung und

b) den zentralen Grenzwertsatz.

Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Aufgabe 2
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2} \text{ und } \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^2} \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq \varepsilon\right) \to 1 \text{ für } n \to \infty.$$

H-Aufgabe 3 (4 Punkte)
Ein Grashüpfer startet am Ursprung der Zahlengerade und hüpft mit jedem Sprung mit Wahrscheinlichkeit 0.8 um zwei Einheiten in die positive Richtung und mit Wahrscheinlichkeit 0.2 um eine Einheit in die negative Richtung. X_n gebe die Position des Grashüpfers nach n Sprüngen an.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_n.

b) Man gebe näherungsweise die Wahrscheinlichkeit an, dass sich das Tier nach 10000 Sprüngen im Intervall [7700, 9000] befindet.

Aufgabe 4
Wir werfen einen fairen Würfel unabhängig voneinander 1000 mal. Die Augensumme aller Würfe liegt erwartungsgemäß bei 3500. Wie ist das Intervall $[3500 - c, 3500 + c]$ näherungsweise zu wählen, damit die tatsächliche Augensumme mit Wahrscheinlichkeit größer als 0.95 darin liegt?

H-Aufgabe 5 (4 Punkte)
Ein Angestellter verlässt an den 225 Arbeitstagen eines Jahres sein Büro kurz nach Dienstschluss. Die Dauer der zusätzlichen Arbeitszeit lässt sich mit einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit dem Erwartungswert von 5 Minuten angemessen beschreiben. Die Zufallsvariablen seien als unabhängig vorausgesetzt. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Angestellte dadurch in einem Jahr insgesamt mehr als 15 Überstunden arbeitet.

H-Aufgabe 6 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Weiterhin sei die Summe durch

$$Y_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

gegeben.
Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\left|Y_n - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0 \text{ und für } n \to \infty.$$

Welcher Satz muss angewandt werden, um zu sehen, dass die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Wahrscheinlichkeit Eins gegen λ^{-1} konvergiert?

Abgabe: 17.1.2019 in der **Vorlesung**