Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2018/19
Übungsserie 12

Vorlesung: B. Schmalfuß

Übung: T. Bock, S. Engelhardt, C.C.M. Ritsch, B. Schmalfuß

Aufgabe 1
Betrachtet man die Binomialverteilung mit den Parametern n und p, so kann - wie in der Vorlesung gezeigt - für *großes* n und *kleines* p die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung approximiert werden, d.h.

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Hierbei ist $\lambda = np$. Eine Solarzelle in einem Solarmodul genüge mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.0002 nicht der Qualitätskontrolle. Benutzen Sie obige Approximation, um die Wahrscheinlichkeit, dass

a) höchstens zwei von 5000,

b) genau eins von 1000,

c) keines von 100

dieser Solarzellen bei einer Kontrolle beanstandet werden, approximativ.

Aufgabe 2
(a) Es seien X, Y unabhängige, Poissonverteilte Zufallsvariable. Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X + Y$.

(b) Es seien X, Y zwei unabhängige, $U(0,1)$-gleichmäßig verteilte Zufallsvariable. Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X + Y$.

Aufgabe 3
Der zufällige Vektor (X, Y) besitze folgende Verteilung:

$Y \setminus X$	-1	0	1
-1	0.2	0	0.2
0	0	0.2	0
1	0.2	0	0.2

Man berechne die Randverteilungen von X und Y, EX, EY, $V(X)$, $V(Y)$. Sind X und Y unabhängig?

H-Aufgabe 4 (6 Punkte)
Es seien X, Y unabhängige, Bernoulli verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $p \in (0, 1)$. Weiterhin sei $Z = (Z_1, Z_2)$ ein zufälliger Vektor, wobei $Z_1 = X + Y$ und $Z_2 = |X - Y|$. Bestimmen Sie

a) die Verteilung des Zufallsvektors Z,

b) die Randverteilungen Z_1 und Z_2,

c) die Erwartungswerte von Z_1, Z_2, und Kovarianz $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2)$,

d) $\mathbb{P}(Z_1 \leq 1, Z_2 \leq 1)$ und $\mathbb{P}(Z_2 > 0,5)$.

H-Aufgabe 5 (6 Punkte)
In einem Automobilwerk werden u.a. zwei Aufgaben von Robotern erledigt. Ein Roboter schweißt zwei Gelenke, ein anderer verschraubt drei Bolzen. Für jedes produzierte Auto sei X die Anzahl der unsachgemäß gezogenen Schweißnähte und Y die Anzahl der falsch angezogenen Bolzen durch die beiden Roboter.
Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von (X, Y) ist durch die folgende Tabelle gegeben:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0,85	0,02	0,02	0,01
1	0,02	0,02	0,01	0,01
2	0,01	0,01	0,01	0,01

Bestimmen Sie

a) die Randverteilungen P_X und P_Y,

b) die Wahrscheinlichkeit für genau eine falsche Schweißnaht und einen falsch angezogenen Bolzen an den produzierten Teilen,

c) die Wahrscheinlichkeit, dass min. eine falsche Schweißnaht und min. zwei falsch angezogenen Bolzen festzustellen sind und

d) die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei falsch angezogene Bolzen zu finden sind.

Aufgabe 6
Es seien $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die zufälligen Lebensdauern von Geräten, die unabhängig voneinander ausfallen und die alle $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt sind. Ein Gerät wird sofort durch ein anderes ersetzt, falls es ausfällt. Es sei S_n die zufällige Lebensdauer der ersten n Geräte. Man berechne die Dichte dieser Zuvallsvariablen.

Hinweis: Man benutze vollständige Induktion und das beispiel aus der letzten Vorlesung.

Abgabe: 24.1.2019 in der **Vorlesung**