Formeln–Statistik für BWL

B. Schmalfuß

12. April 1998

1 Beschreibende Statistik

1.1 Grundbegriffe

Hauptanliegen der beschreibenden Statistik ist die Verdichtung bzw. Darstellung von Datenmaterial.

Merkmal: Zahlenmäßige Charakterisierung einer durch eine Datenerhebung bzw. statistischen Untersuchung interessierende Eigenschaft. (Bezeichnung mit großen Buchstaben: X).

Urliste: Menge aller durch eine Datenerhebung gewonnenen Daten bezüglich eines oder mehrerer Merkmale:

$$x_1,\, x_2, \cdots, x_n.$$

Merkmalsausprägung: Menge der Werte einer Urliste:

$$a_1,\, a_2, \cdots, a_k; \quad k \leq n.$$

Skalen: Bereiche, in denen die Werte der Ausprägungen liegen.

Nominalskala: In einer Nomimalskala ist die Möglichkeit des Unterscheidens der Ausprägungen gegeben.

Ordinalskala: In einer Ordinalskala ist der Vergleich, das Ordnen bzw. das Festlegen einer Rangfolge der Ausprägungen gegeben.

Metrische Skala: In einer metrischen Skala ist neben dem Vergleich auch das Ausführen der Grundrechenoperationen möglich. Damit können Abstände zwischen den Ausprägungen angegeben werden.

Klasseneinteilung: Zusammenfassung der Daten der Urliste, die in gewissen durchschnittsfremden Intervallbereichen (ordinale Skala) liegen:

$$K_1,\, K_2, \cdots, K_p, \quad p \leq n.$$

Faustformel für die Anzahl der Klassen (p):

$$p \approx \sqrt{n}, \quad \text{oder } p \approx 5 \ln n.$$

Häufigkeiten:
absolute Häufigkeit: Anzahl der Elemente der Urliste, die den Merkmalswert a_j besitzen (Bezeichnung: $H(a_j)$).

relative Häufigkeit: Relativanteil der Anzahl der Elemente der Urliste, die die Ausprägung a_j besitzen, bezogen auf die Gesamtanzahl der Elemente der Urliste.

$$h(a_j) = \frac{H(a_j)}{n}, \quad j = 1, \cdots, k.$$

relative Klassenhäufigkeit: Relativanteil der Anzahl der Elemente der Urliste, die in der Klasse K_j, $j = 1, \cdots, p$ liegen, bezogen auf die Gesamtanzahl der Daten. (Bezeichnung h_j).

1.2 Graphische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen

Empirische Verteilungsfunktion: Funktion $F(x)$ mit dem Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$ und Wertevorrat $[0, 1]$, die sich aus den *aufsummierten* relativen Häufigkeiten ergibt. Es seien $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ die der Größe nach geordneten Ausprägungen eines Merkmals X.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < a_1 \\ \sum_{j=1}^{i} h(a_j) & : \quad x \in [a_i, a_{i+1}) \quad \text{für } i = 1, \cdots, k. \\ 1 & : \quad x \geq a_k \end{cases}$$

Stabdiagramm: Bezüglich der Ausprägungen werden auf der Ordinate die relativen Häufigkeiten abgetragen.

Häufigkeitspolygon: In einem Koordinatensystem werden die Punkte $(a_j, h(a_j))_{j=1,\cdots,k}$ durch einen Polygonenzug verbunden.

Histogramm: Charakterisierung der relativen Häufigkeit durch den Flächeninhalt eines Rechteckes:
Es gilt

$$H^j = \frac{h(a_j)}{b_j}, \quad j = 1, \cdots, k,$$

wobei H^j=Rechteckhöhe, b_j=Rechteckbreite ist.

1.3 Lage- und Streuungsmaße

Modus(oder Modalwert): Wert der Ausprägung mit der größten Häufigkeit.

Median: Wir nehmen an, die Daten seien der Größe nach geordnet: $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Der Median charakterisiert einen Wert, so daß die Ausprägungen mit einer relativen Häufigkeit von rund 0,5 links vom Median und mit einer relativen Häufigkeit von rund 0,5 rechts vom Median liegen.

$$\tilde{x}_{0,5} = \begin{cases} x_{\tilde{k}} & : \quad \frac{n}{2} \notin \mathbb{N},\ \tilde{k} \text{ ist kleinste natürliche Zahl größer als } \frac{n}{2} \\ \frac{1}{2} x_{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2} x_{\frac{n+2}{2}} & : \quad \frac{n}{2} \text{ ist eine natürliche Zahl} \end{cases}.$$

α–**Quantil**: Es sei $\alpha \in (0, 1)$. Wir nehmen an, die Daten seien der Größe nach geordnet: $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Das α–Quantil charakterisiert einen Wert, so daß die Ausprägungen mit einer relativen Häufigkeit von rund α links vom α–Quantil und mit einer relativen Häufigkeit von rund $1 - \alpha$ rechts vom α–Quantil liegen.

$$\tilde{x}_\alpha = \begin{cases} x_{\tilde{k}} & : \quad \alpha n \notin \mathbb{N} \ \ \tilde{k} \text{ ist kleinste natürliche Zahl größer als } \alpha n \\ \frac{1}{2} x_{\tilde{k}} + \frac{1}{2} x_{\tilde{k}+1} & : \quad \tilde{k} = \alpha n \text{ ist eine natürliche Zahl} \end{cases}.$$

Der Median ist das $\alpha = 0,5$–Quantil. $\tilde{x}_{0,25}$, $\tilde{x}_{0,75}$ wird als erstes und drittes Quartil bezeichnet.

α-Quantile bezüglich Klasseneinteilung: 1. Schritt: Bestimme das i, so daß

$$\sum_{j=0}^{i-1} h(a_j) < \alpha, \quad \text{und} \sum_{j=0}^{i} h(a_j) \geq \alpha.$$

(Wir setzen $\sum_{i=1}^{0} h(a_j) = 0$).
2. Schritt: Berechne

$$\tilde{x}_\alpha = u_i + \frac{\alpha - \sum_{j=1}^{i-1} h(a_j)}{h(a_i)} b_i,$$

wobei u_i die untere Grenze der Klasse K_i und b_i die Breite der Klasse K_i ist.
Für die Berechnung des klassenbezogenen Medians setze man in der obigen Formel $\alpha = 0,5$.
Arithmetische Mittel: Das arithmetische Mittel entspricht einen durchschnittlichen Wert bzw. einen Gleichgewichtswert der Daten der Urliste.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{k} a_j\, h(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} a_j\, H(a_j).$$

Klassenbezogenes arithmetische Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \bar{x}_i H_i, \quad \text{wobei } \bar{x}_i = \frac{1}{H_i} \sum_{x_j \in K_i} x_j, \text{ für } H_i > 0.$$

H_i, $i = 1, \cdots, p$, bezeichnet die Größe der Klasse K_i. Falls die Verteilung der Daten in den Klassen unbekannt ist, können die $\bar{x}_i$ durch die Klassenmitten m_i, $i = 1, \cdots, p$ ersetzt werden:

$$\bar{x}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} m_i H_i \approx \bar{x}.$$

Gewogenes arithmetisches Mittel: Die Elemente der Urliste werden mit differenziertem Gewicht betrachtet:

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i, \quad \text{wobei} \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad w_i \geq 0.$$

Geometrisches Mittel: Das durchschnittliche Wachstums wird durch das geometrische Mittel beschrieben:

$$\bar{x}_G = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}, \quad x_i > 0 \quad \text{für } i = 1, \cdots, n.$$

Es gilt immer $\bar{x}_G \leq \bar{x}$.

Gewogenes geometrisches Mittel:

$$\bar{x}_{G,w} = x_1^{w_1} \cdot \ldots x_n^{w_n}.$$

wobei $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad w_i \geq 0$.

Harmonisches Mittel: Das harmonische Mittel findet seine Anwendung bei der Berechnung von Verhältnisgrößen:

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}},$$

wobei $x_i > 0$ für $i = 1, \cdots, n$ vorausgesetzt wird. Es kann auch ein gewogenes harmonisches Mittel betrachtet werden.:

$$\bar{x}_{H,w} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}}.$$

1.4 Streuungsmaße

Spannweite: Charakterisiert Breite des Bereiches, in dem die Daten liegen:

$$R = \max_{i=1,\cdots,n} x_i - \min_{i=1,\cdots,n} x_i.$$

Quartilsabstand: Gibt Breite des zentralen Bereiches an, in dem rund 50% der Daten liegen.

$$IQ = \tilde{x}_{0,75} - \tilde{x}_{0,25}.$$

Varianz/Standardabweichung: Die Varianz gibt die durchschnittliche quadratische Abweichung vom Mittelwert an.

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{k} (a_j - \bar{x})^2 h(a_j).$$

Für die Standardabweichung s gilt

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Bemerkung: In der Induktiven Statistik wird für die Varianz eine leicht modifizierte Formel benutzt, siehe unten.

Varianz unter Klasseneinteilung:

$$s_K^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} (\bar{x}_j - \bar{x})^2 H_j,$$

wobei $\bar{x}_j$ der Mittelwert der Elemente der j-ten Klasse und H_j die Anzahl der Elemente der j-ten Klasse ist. Es gilt immer $s_K^2 \leq s^2$.

Variationskoeffizient: Standardabweichung wird bezüglich des Mittelwertes normiert.

$$v = \frac{s}{\bar{x}}.$$

Momente: Mit Momenten kann die mittlere Abweichung zu speziellen Werten gemessen werden. Momente erlauben weiterhin Aussagen über die Gestalt der Häufigkeitsverteilung.
k-tes Moment bezüglich a:

$$M_{k,a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^k = \sum_{j=1}^{k} (a_j - a)^k h(a_j), \quad k \in \mathbb{N}, a \text{ reelle Zahle.}$$

k-tes zentrales Moment:

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k = \sum_{j=1}^{k}(a_j - \bar{x})^k h(a_j), \quad k \text{ eine natürliche Zahl.}$$

Schiefe: Die Maßzahl g_1 charakterisiert die Schiefe einer Häufigkeitsverteilung:

$$g_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für eine linksschiefe Häufigkeitsverteilung gilt $g_1 < 0$ und entsprechend für eine rechtsschiefe Häufigkeitsverteilung $g_1 > 0$.

1.5 Konzentration

Die Lorenz–Kurve: ermöglicht eine Charakterisierung der *relativen* Konzentration. Es wird die relative Konzentration der Merkmalswerte bezüglich der Merkmalsträger betrachtet. Die Lorenzkurve ergibt sich als ein Polygonenzug. Die Koordinaten der Knickpunkte des Polygonenzuges (k_i, l_i) werden wie folgt gebildet:
1) Die Ausprägungen werden der Größe nach geordnet.
2) Setze $k_0 = 0$, $l_0 = 0$.
3) k_i: Die relativen Häufigkeiten (relativer Anteil der Merkmalsträger) $h(a_1), \cdots, h(a_i)$ des Auftretens der der Größe nach geordneten Ausprägungen $a_1, \cdots, a_n$ werden aufsummiert und auf der Abszisse abgetragen.
4) l_i: Die Ausprägungen $a_1, \cdots a_i$ (entsprechend ihrer Vielfachheit) werden auf die Gesamtsumme bei Berücksichtigung der Vielfachheit bezogen und aufsummiert und auf der Ordinate abgetragen.
Liegen n gleichberechtigte Merkmalsträger (z.B. Personen) mit geordneter Merkmalsgröße x_j, $j = 1, \cdots, n$ vor, dann ergibt sich $k_i = i/n$ und $l_i = \sum_{j=1}^{i} x_j / \sum_{j=1}^{n} x_j$.

Die Fläche zwischen Diagonale und Lorenz–Kurve ist ein Maß für die Konzentration.

Gini Koeffizient: Das zweifache dieses Flächeninhaltes ist der Gini–Koeffizient:

$$K_G = \left(\sum_{i=1}^{n}(k_{i-1} + k_i)(l_i - l_{i-1})\right) - 1, \qquad K_G \in (0, 1).$$

1.6 Zweidimensionale Merkmale

Es werden Paare von Daten $(x_i, y_i)_{i=1,\cdots,n}$ bezüglich des Merkmalsvektors (X, Y) betrachtet. Die möglichen Merkmalsausprägungen

$$(a_j, b_k)_{j=1,\cdots,m_1,\, k=1,\cdots,m_2}$$

ergeben sich aus den Merkmalsausprägungen der Merkmale X, Y, die mit $(a_j)_{j=1,\cdots,m_1}$ bzw. $(b_k)_{k=1,\cdots,m_2}$ bezeichnet werden.
Die relativen Häufigkeiten der Ausprägungen $h((a_j, b_k))$ ergibt sich aus dem Quotienten der der absoluten Häufigkeit des Auftretens von (a_j, b_k) und der Gesamtzahl der Meßwerte n. Die Verteilung der relativen Häufigkeit kann in einer Kontigenztafel dargestellt werden.

	Y	b_1	b_2	$\cdots$	b_{m_2}	
X	a_1	$h((a_1,b_1))$	$h((a_1,b_2))$	$\cdots$	$h((a_1,b_{m_2}))$	$h(a_1)=h_{1,\cdot}$
	a_2	$h((a_2,b_1))$	$h((a_2,b_2))$	$\cdots$	$h((a_2,b_{m_2}))$	$h(a_2)=h_{2,\cdot}$
	$\cdots$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		
	a_{m_1}	$h((a_{m_1},b_1))$	$h((a_{m_1},b_2))$	$\cdots$	$h((a_{m_1},b_{m_2}))$	$h(a_{m_1})=h_{a_{m_1},\cdot}$
		$h(b_1)=h_{\cdot,1}$	$h(b_2)=h_{\cdot,2}$	$\cdots$	$h(b_{m_2})=h_{\cdot,m_2}$	1

Randverteilung: Gibt die Häufigkeitsverteilung der Ausprägungen $(a_j)_{j=1,\cdots,m_1}$ (bzw. $(b_k)_{k=1,\cdots,m_2}$) an. Sie kann in der rechten Spalte bzw. untersten Zeile der Kontingenztafel abgelesen werden.

Bedingte Verteilung: $(h(a_j|b_{k^*}))_{j=1,\cdots,m_1}$ Gibt die Verteilung des Merkmals X unter der Bedingung an, daß die zweite Komponente des Merkmalsvektors b_{k^*} ist

$$h(a_j|b_{k^*}) = \frac{h((a_j,b_{k^*}))}{h(b_{k^*})} \quad \text{falls } h(b_{k^*}) \neq 0.$$

Entsprechend kann $(h(b_k|a_{j^*}))_{k=1,\cdots,m_2}$ definiert werden.

Unabhängigkeit: Die Merkmale X und Y heißen unabhängig, falls

$$h((a_j,b_k)) = h(a_j)\cdot h(b_k)$$

für $j=1,\cdots,m_1$, $k=1,\cdots,m_2$ gilt. Für praktische Fragestellungen ist es sinnvoll $=$ durch $\approx$ zu ersetzen.

1.7 Korrelationsrechnung

Kovarianz: Die Kovarianz stellt ein Maß für die tendenzielle Richtung des (linearen) Zusammenhanges der Merkmale X und Y dar.

$$s_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \bar{x}\bar{y}.$$

Korrelationskoeffizient: Der Korrelationskoeffizient stellt ein standardisiertes Maß für die Strafheit des (linearen) Zusammenhanges und die tendenzielle Richtung der Merkmale X und Y dar.

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}.$$

Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient: Den Daten jeder Komponente des Merkmalsvektors (X,Y) wird der Rang $R(X)$, $R(Y)$ (d.h. die Position der Größe geordneten Merkmalen) zugeordnet.

$$r_S = r_{R(X),R(X)} = 1 - \frac{6\cdot\sum_{i=1}^{n}(R(x_i)-R(y_i))^2}{n(n^2-1)}.$$

(Bei der letzten Formel wird vorausgesetzt, daß sich alle X-Ränge und Y-Ränge unterscheiden.)

1.8 Regression

Es soll der funktionale Zusammenhang zwischen den Merkmalen Y und X geschätzt werden.
Die Anpassung eines Modells

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

erfolgt durch die Methode der kleinsten Quadrate. Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von $\vec{a} = (a_0,\, a_1, \cdots, a_n)^T$:

$$A\vec{a} = \vec{b}, \tag{1}$$

wobei $\vec{b} = (\sum y_i, \sum y_i x_i, \cdots, \sum y_i x_i^n)^T$ und

$$A = \left(\begin{array}{llll} n & \sum x_i & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \multicolumn{4}{l}{\dotfill} \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \cdots & \sum x_i^{2n} \end{array} \right).$$

Regressionsgerade: Als Spezialfall von (1) erhält man als Lösung für die Regressionsgerade $y = a_0 + a_1 x$.

$$a_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum y_i x_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \qquad a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}.$$

oder

$$a_1 = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}, \qquad a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}.$$

Bestimmtheitsmaß:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n (y(x_i) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

wobei $e_i = y_i - y(x_i)$ die Residuen sind.

1.9 Zeitreihenanalyse

Allgemeines Zeitreihenmodell:

$$Y(t) = F(G(t), S(t), R(t))$$

wobei G-glatte Komponente, S-Saison-Komponente und R-irreguläre Komponente ist. G wird manchmal aufgeteilt in $G = f(T(t), K(t))$ mit T-Trendkomponente und K-Konjunkturkomponente.

Additives Zeitreihenmodell:

$$Y(t) = G(t) + S(t) + R(t), \quad G(t) = T(t) + K(t)$$

Trendkomponente: Die Trendkomponente wird durch die Methode der kleinsten Quadrate geschätzt. Gebräuchliche Ansätze sind:

$$y = a_0 + a_1 t, \qquad y = a_0 e^{a_1 t}, \qquad y = a_0 \cdot a_1^t, \qquad y = \frac{e^{a_0 + a_1 t}}{1 + e^{a_0 + a_1 t}}.$$

Die Methode der gleitenden Durchschnitte:

$$y^*(t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^{k} y(t+j)$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ und $t = k+1, \cdots, n-k$.
Rekursionsformel:

$$y^*(t+1) = y^*(t) + \frac{1}{2k+1}(y(t+k+1) - y(t-k)).$$

Methode der gewichteten gleitenden Durchschnitte:

$$y^*(t) = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}y(t-k) + \sum_{j=-(k-1)}^{k-1} y(t+j) + \frac{1}{2}y(t+k)\right)$$

Konjunkturkomponente: Die Konjunkturkomponente kann nach Trendbereinigung durch die Methode der gleitenden Durchschnitte geschätzt werden. Es sei $T_b(t) = Y(t) - T(t)$.

jahreszeitlich:

$$K(t) = \frac{\frac{1}{2}T_b(t-2) + T_b(t-1) + T_b(t) + T_b(t+1) + \frac{1}{2}T_b(t+2)}{4}$$

monatlich:

$$K(t) = \frac{\frac{1}{2}T_b(t-6) + T_b(t-5) + \cdots + T_b(t) + \cdots + T_b(t+5) + \frac{1}{2}T_b(t+6)}{12}.$$

Glatte Komponente: Die glatte Komponente kann durch die *Methode der gleitenden Durchschnitte* geschätzt werden.

Saison-Komponente: Die Saison-Komponente kann durch das Phasendurchschnittsverfahren geschätzt werden. Es sei $TK_b(t) = T_b(t) - K(t)$.

$$S(j) = \frac{TK_b(j+0p) + TK_b(j+1p) + \cdots + TK_b(j+(m-1)p)}{m}$$

j Unterzeitraum
p Periode (z.B. $p = 4$, 12)
m Anzahl der zur Verfügung stehenden TK_b-Werte je Jahreszeit/Monat.
Es gilt $S(j) = S(lp + j)$ für passende $l \in \mathbb{N}$.

Irreguläre Komponente: $R(t) = TK_b(t) - S(t)$

2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Eines der Hauptanliegen der Wahrscheinlichkeitstheorie ist es für *zufällige* Ereignisse, die als Ergebnis eines *zufälligen Versuches* entstehen, eine quantitative Bewertung der Häufigkeit ihres Auftretens bzw. Nichtauftretens zu geben. Das Wort zufälliger Versuch kann stehen für Beobachtung, Probe, Untersuchung, Test oder Experiment wobei die entsprechenden Ergebnisse, Werte oder Ausgänge aufgrund von fehlenden Informationen nicht vorhersehbar sind.

2.1 Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Rechenregeln für zufällige Ereignisse: Zufällige Ereignisse werden mit großen Buchstaben bezeichnet. Weiterhin werden zwei spezielle Ereignisse Ω, $\emptyset$ eingeführt. Ω bezeichnet ein Ereignis, das immer eintritt (das *sichere Ereignis*), $\emptyset$ ist das *unmögliche Ereignis*, das niemals eintritt.
Summe (Vereinigung) von Ereignissen: $Z = X \cup Y$ bezeichnet die Menge der elementaren Ausgänge eines zufälligen Versuches, die entweder in X oder in Y liegen.
Produkt (Durchschnitt) von Ereignissen: $Z = X \cap Y$ bezeichnet die Menge der elementaren Ausgänge eines zufälligen Versuches, die sowohl in X als auch in Y liegen.

Komplementäres (inverses) Ereignis: $Z = \bar{X}$ bezeichnet die Menge der elementaren Ausgänge eines zufälligen Versuches, die nicht in X liegen.
X zieht Y nach sich: wenn X eintritt, dann tritt auch Y ein ($X \subset Y$).
Speziell gilt:

$$\begin{aligned}
&X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z, \quad X \cup \Omega = \Omega, \quad X \cup \emptyset = X,\\
&X \cap Y = Y \cap X, \quad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z, \quad X \cap \Omega = X \quad X \cap \emptyset = \emptyset,\\
&(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z), \qquad (X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z),\\
&\overline{(\bar{X})} = X, \qquad \overline{(X \cap Y)} = \bar{X} \cup \bar{Y}, \qquad \overline{(X \cup Y)} = \bar{X} \cap \bar{Y}.
\end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit: Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, $(0 \le P(A) \le 1)$ eines zufälligen Ereignisses A chrakterisiert, ob dieses Ereignis *wohl kaum* ($P(A) \approx 0$) oder *ziemlich sicher* ($P(A) \approx 1$) das Ergebnis eines zufälligen Versuches ist.

Axiome der Wahrscheinlichkeit:

1. Axiom $\quad P(A) \in [0, 1]$
2. Axiom $\quad P(\Omega) = 1$
3. Axiom $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad$ falls $A \cap B = \emptyset$.

Weitere Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \qquad \text{für beliebige } A,\, B\\
&P(\bar{A}) = 1 - P(A),\ P(\emptyset) = 0.
\end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Gibt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines zufälligen Ereignisses A unter der Bedingung des Eintretens eines zufälligen Ereignisses B an:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0.$$

Multiplikationssatz:

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(B|A)P(A), \qquad P(A) \neq 0\\
P(A \cap B) &= P(A|B)P(B), \qquad P(B) \neq 0.
\end{aligned}$$

Unabhängigkeit von zufälligen Ereignissen: Das zufällige Ereignis A ist unabhängig von B, falls B keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A hat:

$$P(A|B) = P(A).$$

Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Klassische Wahrscheinlichkeit: Es wird ein zufälliger Versuch mit n elementaren Ausgängen betrachtet. Von diesen Ausgängen wird angenommen, daß sie *im Mittel* gleichhäufig auftreten. Dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der elementaren Ereignisse, die A ausfüllen}}{n}.$$

2.2 Zufallsvariable

Die Charakterisierung der (Zahlen)werte eines zufälligen Versuches erfolgt durch Zufallsvariablen (auch Zufallsgrößen genannt). Der Wertevorrat einer *diskreten* Zufallsvariable ist endlich oder abzählbar unendlich. Die Werte einer *stetigen* Zufallsvariable füllen ein Kontinuum (z.B. ein echtes Intervall) aus.

Verteilungsfunktion: Es sei Z eine Zufallsvariable, dann ist die Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ von Z definiert durch

$$F_Z(z) = P(Z \leq z), \qquad z \in \mathbf{R}.$$

Dichtefunktion: Dichtefunktionen charakterisieren Wahrscheinlichkeiten von stetigen Zufallsvariablen. Es sei $f_Z(z)$ die Dichte von Z:

$$P(z_1 < Z \leq z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f_Z(z)dz.$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&f_Z(z) \geq 0, \\
&\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)dz = 1, \\
&F'_Z(z) = f_Z(z) \quad \text{falls Ableitung existiert}, \\
&\int_{-\infty}^{z} f_Z(z')dz = F_Z(z').
\end{aligned}$$

Parameter von Zufallsvariablen:
Diskreten Zufallsvariable: Es seien z_i die Werte, die eine diskrete Zufallsvariable Z annimmt mit $p_i = P(Z = z_i)$
Erwartungswert:

$$EZ = \sum_i z_i p_i$$

Varianz:

$$D^2Z = \sum_i (z_i - EZ)^2 p_i = \sum_i z_i^2 p_i - (EZ)^2.$$

Stetige Zufallsvariable:
Erwartungswert:

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)dz$$

Varianz:

$$D^2Z = \int_{-\infty}^{\infty} (z - EZ)^2 f_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z)dz - (EZ)^2$$

Die **Standardabweichung** ist die Quadratwurzel aus der Varianz.

2.3 Spezielle Verteilungen

Binomialverteilung: Es wird ein zufälliger Versuch n mal unter gleichen Bedingungen *unabhängig* durchgeführt. Jeder einzelne dieser Versuche besitzt nur die Ausgänge A und $\bar{A}$ mit $P(A) = p \in [0, 1]$ und $P(\bar{A}) = 1 - p$. Die Zufallsvariable Z

ist binomialverteilt, falls sie die (zufällige) Anzahl k des Eintretens von A bei diesen n Versuchen zählt.

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1 \cdots, n$$
$$EZ = np, \qquad D^2 Z = np(1-p).$$

Hypergeometrische Verteilung: Anwendung bei Stichprobenentnahmen ohne Zurücklegen des gezogenen Stückes.

$$P(Z = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

N-Gesamtzahl der Stücke, n-Größe der Stichprobe, M-Anzahl der fehlerhaften Stücke, k-Anzahl der fehlerhaften gezogenen Stücke.

Normalverteilung: Eine Zufallsvariable Z heißt (μ, σ) normalverteilt ($Z \sim N(\mu, \sigma)$) Bezeichnungsänderungen, falls sie die Dichtefunktion

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

besitzt, wobei μ, $\sigma > 0$ Parameter sind, die dem Erwartungswert, Standardabweichung entsprechen. Durch die Transformation

$$Y = \frac{Z - \mu}{\sigma}$$

ergibt sich eine $N(0, 1)$ (standard) normalverteilte Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion einer $N(0, 1)$-verteilten Zufallsvariable wird als $\Phi(z)$ bezeichnet.

$$P(z_1 < Z \leq z_2) = \Phi\left(\frac{z_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z_1 - \mu}{\sigma}\right) \qquad Z \sim N(\mu, \sigma) - \text{verteilt}$$
$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z), \qquad z < 0$$

Werte von $\Phi(z)$ können aus der Tabelle (siehe unten) abgelesen werden.

3 Schließende Statistik

3.1 Grundbegriffe

Die Aufgabe der Schließenden Statistik besteht darin, über eine nicht vollständig bekannte *Grundgesamtheit* mittels einer *zufälligen Stichprobe* Aussagen zu treffen.

Grundgesamtheit: Die zufällige variierenden Realisierungen eines Merkmals werden als Grundgesamtheit bezeichnet. Sie wird als Zufallsgröße X wiedergegeben.

Mathematische Stichprobe: Der Vektor $(X_1, \cdots, X_n)$ bestehend aus n unabhängigen und identisch verteilter Zufallsgrößen mit Verteilung der Grundgesamtheit X heißt mathematische Stichprobe. Eine konkrete Stichprobe ist eine Realisierung einer mathematischen Stichprobe.

Stichprobenfunktion: Eine von der mathematischen Stichprobe $(X_1, \cdots, X_n)$ abhängige Zufallsvariable $T(X_1, \cdots, X_n)$ heißt Stichprobenfunktion.

Erwartungstreue Punktschätzung: Es sei p ein Parameter der Verteilung der Grundgesamtheit X. Zum Beispiel sei $p = \mu = E\,X$ der Erwartungswert von X, wobei E als Symbol für den Erwartungswert verwendet wird. Die Stichprobenfunktion $T(X_1, \cdots, X_n)$ heißt erwartungstreue Punktschätzung für den Parameter p der Grundgesamtheit X, falls

$$E\,T(X_1, \cdots, X_n) = p.$$

$\bar{X}$ ist erwartungstreue Punktschätzung für $\mu = E\,X$.

$$S^2 = \frac{1}{\mathbf{n-1}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

ist erwartungstreue Punktschätzung für $\sigma^2 = D^2\,X$.

3.2 Konfidenzintervalle

Konfidenzintervall: Es sei p ein Parameter der Verteilung einer Grundgesamtheit X. Ein zufälliges Intervall

$$(G_u^\alpha, G_o^\alpha)$$

gegeben durch die Stichprobenfunktionen $G_u^\alpha(X_1, \cdots, X_n)$, $G_o^\alpha(X_1, \cdots, X_n)$, welches mit vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1)$ den Parameter p nicht enthält, heißt Konfidenzintervall für den Parameter p. $1 - \alpha$ heißt statistische Sicherheit.

Konfidenzintervalle für den Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit:

1) $\sigma^2 = D^2\,X$ bekannt:

i) *zweiseitige Fragestellung*:

$$\begin{aligned} &I = (g_u^\alpha, g_o^\alpha) \\ &g_u^\alpha = \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad g_o^\alpha = \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bezeichnet das $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$–Quantil der $N(0,1)$-Normalverteilung.

ii) *einseitige Fragestellung*:

$$\begin{aligned} &I = (g_u^\alpha, +\infty) \\ &g_u^\alpha = \bar{x} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &I = (-\infty, g_o^\alpha) \\ &g_o^\alpha = \bar{x} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

2) $\sigma^2 = D^2\,X$ unbekannt:

i) *zweiseitige Fragestellung*:

$$I = (g_u^\alpha, g_o^\alpha)$$
$$g_u^\alpha = \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},m}\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad g_o^\alpha = \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},m}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2},m}$ bezeichnet das $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$–Quantil der t-Verteilung mit $m = n-1$ Freiheitsgraden, wobei von einer Stichprobe der Größe n ausgegangen wird.

ii) *einseitige Fragestellung*:

$$I = (g_u^\alpha, +\infty)$$
$$g_u^\alpha = \bar{x} - t_{1-\alpha,m}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

oder

$$I = (-\infty, g_o^\alpha)$$
$$g_o^\alpha = \bar{x} + t_{1-\alpha,m}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

3.3 Hypothesentests

Anhand einer Stichprobe wird durch eine Entscheidungsregel eine Hypothese über eine Grundgesamtheit verworfen/nicht verworfen. Die zu testende Hypothese wird mit H_0 bezeichnet. Eine manchmal bestehende alternative Hypothese sei H_a oder H_1. Die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese abzulehnen, obwohl sie zutrifft wird mit *Irrtumswahrscheinlichkeit* bzw. *Signifikanzniveau* α bezeichnet.

Test der Hypothese $H_0:\ E\ X = \mu_0$ einer normalverteilten Grundgesamtheit X mit bekannter Varianz σ^2

i) *zweiseitiger Test*:

Nichtverwerfen der Hypothese H_0, falls

$$\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ii) *einseitiger Test*:

Nichtverwerfen der Hypothese H_0, falls

$$\mu_0 - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}$$

oder

$$\bar{x} < \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $z_{1-\alpha}$ ist das entsprechende Quantil der $N(0,1)$–Normalverteilung und n ist der Umfang der Stichprobe.

Test der Hypothese $H_0: \; E\,X = \mu_0$ einer normalverteilten Grundgesamtheit X mit unbekannter Varianz σ^2

i) *zweiseitiger Test*:

Nichtverwerfen der Hypothese H_0, falls

$$\mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2},m}\frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2},m}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

ii) *einseitiger Test*:

Nichtverwerfen der Hypothese H_0, falls

$$\mu_0 - t_{1-\alpha,m}\frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{x}$$

oder

$$\bar{x} < \mu_0 + t_{1-\alpha,m}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$t_{1-\frac{\alpha}{2},m}$ bzw. $t_{1-\alpha,m}$ bezeichnet das entsprechende Quantil der t–Verteilung mit $m = n-1$ Freiheitsgraden, wobei n die Größe der gezogenen Stichprobe ist.

Chi-Quadrat Anpassungstest: Dieser Test dient zur Prüfung einer Hypothese über die Verteilungsfunktion einer Grundgesamtheit. Er basiert auf der Differenz von Klassenhäufigkeiten und der erwarteten Häufigkeit des *Treffens* dieser Klasse unter Annahme der in der Hypothese formulierten Verteilungsfunktion.
Vorgehen:
1. Formulierung einer Hypothese über die Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit X: $H_0 : F_X(x) = F(x)$. Dabei kann $F(x)$ noch m unbekannte Parameter enthalten (z.B. μ, σ) bei der Normalverteilung.
2. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α.
3. Festlegen von Klassen $K_j = (a_{j-1}, a_j]$, $-\infty = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = \infty$.
4. Ziehen einer Stichprobe $x_1, \cdots, x_n$. Errechnen (Schätzen) der absoluten Klassenhäufigkeiten H_j. Falls Klassenhäufigkeiten zu klein sind, werden benachbarte Klassen zusammengelegt. Schätzung der m unbekannten Parameter aus der Stichprobe (z.B. μ, σ).
5. Berechnung der Klassenwahrscheinlichkeiten unter Annahme der Hypothese H_0: $p_j^0 = F(a_j) - F(a_{j-1})$, $j = 1, \cdots, k$.
6. Berechnung der Stichprobenfunktion

$$u = \sum_{j=1}^{k} \frac{(H_j - np_j^0)^2}{np_j^0}$$

Diese Stichprobenfunktion ist χ^2 (sprich chi-quadrat) verteilt mit $k-m-1$ Freiheitsgraden.
7. Ablehnung der Hypothese falls $u \geq \chi^2_{1-\alpha,k-m-1}$. Dabei bezeichnet $\chi^2_{1-\alpha,k-m-1}$ das $1-\alpha$-Quantil einer χ^2 verteilten Grundgesamtheit mit $k-m-1$ Freiheitsgraden.

4 Tabellen

Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung $\Phi(z)$

z	0.00.	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.50000	.50398	.50797	.51196	.51595	.51993	.52392	.52790	.53188	.53585
0.1	.53982	.54379	.54775	.55171	.55567	.55961	.56355	.56749	.57142	.57534
0.2	.57925	.58316	.58706	.59095	.59483	.59870	.60256	.60641	.61026	.61409
0.3	.61791	.62171	.62551	.62930	.63307	.63683	.64057	.64430	.64802	.65173
0.4	.65542	.65909	.66275	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68438	.68793
0.5	.69146	.69497	.69846	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72574	.72906	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75174	.75490
0.7	.75803	.76114	.76423	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78523
0.8	.78814	.79102	.79389	.79673	.79954	.80233	.80510	.80784	.81057	.81326
0.9	.81593	.81858	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83397	.83645	.83891
1.0	.84134	.84375	.84613	.84849	.85083	.85314	.85542	.85769	.85992	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87285	.87492	.87697	.87899	.88099	.88297
1.2	.88493	.88686	.88876	.89065	.89251	.89435	.89616	.89795	.89972	.90147
1.3	.90319	.90490	.90658	.90824	.90987	.91149	.91308	.91465	.91620	.91773
1.4	.91924	.92073	.92219	.92364	.92506	.92647	.92785	.92921	.93056	.93188
1.5	.93319	.93447	.93574	.93699	.93821	.93942	.94062	.94179	.94294	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94844	.94949	.95052	.95154	.95254	.95352	.95448
1.7	.95543	.95636	.95728	.95818	.95907	.95994	.96079	.96163	.96246	.96327
1.8	.96406	.96485	.96562	.96637	.96711	.96784	.96855	.96925	.96994	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97319	.97381	.97441	.97500	.97558	.97614	.97670
2.0	.97724	.97778	.97830	.97882	.97932	.97981	.98030	.98077	.98123	.98169
2.1	.98213	.98257	.98299	.98341	.98382	.98422	.98461	.98499	.98537	.98573
2.2	.98609	.98644	.98679	.98712	.98745	.98777	.98808	.98839	.98869	.98898
2.3	.98927	.98955	.98982	.99009	.99035	.99061	.99086	.99110	.99134	.99157
2.4	.99180	.99202	.99223	.99245	.99265	.99285	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99429	.99445	.99461	.99476	.99491	.99505	.99520
2.6	.99533	.99547	.99560	.99573	.99585	.99597	.99609	.99620	.99631	.99642
2.7	.99653	.99663	.99673	.99683	.99692	.99702	.99710	.99719	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99759	.99767	.99774	.99781	.99788	.99794	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99824	.99830	.99835	.99841	.99846	.99851	.99855	.99860

Quantile der $N(0,1)$-Normalverteilung

Quantil: z_β

β	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
z_β	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Quantile der t–Verteilung:

Quantil: $t_{\beta,m}$. m ist die Anzahl der Freiheitsgrade.

			β			
m	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,437
10	1,327	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373

Quantile der χ^2-Verteilung

Quantil $\chi^2_{\beta,m}$. m ist die Anzahl der Freiheitsgrade.

m	β 0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.09	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.003	0.015	2.705	3.841	5.025	6.634	7.879
2	0.010	0.020	0.050	0.102	0.210	4.605	5.991	7.377	9.210	10.59
3	0.071	0.114	0.215	0.351	0.584	6.251	7.814	9.348	11.34	12.83
4	0.206	0.297	0.484	0.710	1.063	7.779	9.487	11.14	13.27	14.86
5	0.411	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.08	16.74
6	0.675	0.872	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.44	16.81	18.54
7	0.989	1.239	1.689	2.167	2.833	12.01	14.06	16.01	18.47	20.27
8	1.344	1.646	2.179	2.732	3.489	13.36	15.50	17.53	20.09	21.95
9	1.734	2.087	2.700	3.324	4.168	14.68	16.91	19.02	21.66	23.55
10	2.155	2.558	3.246	3.940	4.865	15.98	18.30	20.48	23.20	25.18
11	2.603	3.053	3.815	4.574	5.577	17.27	19.67	21.94	24.72	26.75
12	3.073	3.570	4.403	5.639	6.303	18.54	21.02	23.33	26.21	28.29
13	3.565	4.106	5.008	5.891	7.041	19.81	22.36	24.73	27.68	29.81
14	4.074	4.660	5.628	6.570	7.789	21.06	23.68	26.11	29.14	31.31
15	4.600	5.229	6.262	7.260	8.546	22.30	24.99	27.48	30.57	32.80
16	5.142	5.812	6.907	7.961	9.312	23.54	26.29	28.84	31.99	34.26
17	5.697	6.407	7.564	8.671	10.08	24.76	27.58	30.19	33.40	35.71
18	6.264	7.014	8.230	9.390	10.86	25.98	28.86	31.52	34.80	37.15
19	6.843	7.632	8.906	10.11	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.433	8.260	9.590	10.85	12.44	28.41	31.41	34.16	37.56	39.99
21	8.033	8.897	10.28	11.59	13.23	29.61	32.67	35.47	38.93	41.40
22	8.642	9.542	10.98	12.33	14.04	30.81	33.92	36.78	40.28	42.79
23	9.260	10.19	11.68	13.09	14.84	32.00	35.17	38.07	41.63	44.18
24	9.886	10.85	12.40	13.84	15.65	33.19	36.41	39.36	42.97	45.55
25	10.51	11.52	13.11	14.61	16.45	34.38	37.65	40.64	44.31	46.92
26	11.16	12.19	13.84	15.37	17.29	35.56	38.88	41.92	45.64	48.28
27	11.80	12.87	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.30	16.92	18.93	37.91	41.33	44.46	48.27	50.99
29	13.11	14.25	16.04	17.70	19.76	39.08	42.55	45.72	49.58	52.33
30	13.78	14.95	16.79	18.49	20.59	40.25	43.77	46.97	50.89	53.67