Übungsaufgaben zur VL EWMS, WS 2018/19

Blatt 2, Abgabe: 01.11.2018, 10 Uhr

5. (1+1+1 Punkte)

   Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in einer nichtleeren Menge Ω. Beweisen Sie:

   (i) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$,

   (ii) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$,

   (iii) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$.

6. (1+2 Punkte)

   Ein Modell für den n-maligen Münzwurf ist gegeben durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\colon\ \omega_i \in \{0,1\}\}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ und $P(\{\omega\}) = 2^{-n}$ $\forall \omega \in \Omega$. ("1" möge für Zahl stehen und "0" für Wappen.) A_k sei das Ereignis, dass genau k-mal Zahl fällt.

   (i) Beschreiben Sie A_k als eine Teilmenge von Ω!

   (ii) Wie viele Teilmengen hat Ω? Wie viele Mengen enthält die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}_0$ in Ω, welche die Mengen $A_0, \ldots, A_n$ enthält?

7. (3 Punkte)

   $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

   Zeigen Sie, dass

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\colon 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

   gilt!

8. (2 Punkte)

   Betrachten Sie eine Folge von Urnenmodellen des Typs I (jeweils n-faches Ziehen OHNE Zurücklegen), wobei im N-ten Modell die Anzahl der schwarzen Kugeln s_N und die Anzahl der weißen Kugeln w_N sei ($s_N + w_N = N$). Es gelte $s_N/N \longrightarrow_{N\to\infty} p \in (0,1)$. Wogegen konvergieren die Wahrscheinlichkeiten, dass genau k schwarze Kugeln gezogen werden, falls $N \to \infty$?