Übungsaufgaben zur VL EWMS, WS 2018/19

Blatt 6, Abgabe: 28.11.2018, 10 Uhr

20. (2 Punkte)

    Die Zufallsvariablen $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ seien stochastisch unabhängig. $(P(X_i = k) = e^{-\lambda_i}\lambda_i^k/k! \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots)$

    Zeigen Sie, dass

    $$X_1 + X_2 = \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

    gilt!

21. (1 Punkt)

    X sei eine diskrete Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X^2] < \infty$.

    Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist $E[(X - c)^2]$ minimal und wie groß ist dieses Minimum?

22. (2 Punkte)

    Gegeben seien Zufallsvariable X und Y mit $P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega) = 1\}) = P(\{\omega : X(\omega) = -Y(\omega) = 1\}) = P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega) = 0\}) = 1/3$

    Zeigen Sie, dass X und Y unkorreliert (Korrelation Null), aber nicht unabhängig sind!

24. (2 Punkte)

    Wir betrachten ein mit Gas gefülltes Gefäß. Es beinhaltet $n = 0,25 \cdot 10^{23}$ Moleküle. Die Bewegung der Gasmoleküle ist irregulär. Daher wird jedes Gasmolekül mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$ in der linken bzw. rechten Hälfte sein, unabhängig von den anderen Molekülen.

    Treffen Sie eine Aussage darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Anteil der Moleküle in der linken Hälfte größer als $(1 + 10^{-8})/2$ ist!

    Hinweis: Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung.