Übungsaufgaben zur VL EWMS, WS 2018/19

Blatt 11, Abgabe: 16.01.2019, 10 Uhr

37. (2 Punkte)

    Die Erfolgswahrscheinlichkeit $\theta \in [0,1]$ eines Zufallsexperimentes soll geschätzt werden. Dazu wird das Experiment n-mal (voneinander unabhängig) wiederholt und θ wird durch die relative Häufigkeit der Erfolge geschätzt.

    Wie groß muss n gewählt werden, damit das quadratische Risiko des Schätzers für alle möglichen Werte von θ nicht größer als 0,01 ist?

38. (1+2 Punkte)

    Gegeben seien unabhängige Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$, wobei $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie Schätzer $\widehat{\theta}$ der Form $\widehat{\theta} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, wobei $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen sind.

    (i) Wie müssen $a_1, \ldots, a_n$ gewählt werden, damit $\widehat{\theta}$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist? ($\widehat{\theta}$ ist erwartungstreu, falls $E_\theta \widehat{\theta} = \theta$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$.)

    (ii) Durch welche Wahl der $a_1, \ldots, a_n$ wird $E_\theta(\widehat{\theta} - \theta)^2$ unter der Voraussetzung der Erwartungstreue minimiert?
    Hinweis: Es gilt $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}_n)^2 + n\bar{a}_n^2$, *wobei* $\bar{a}_n = (a_1 + \cdots + a_n)/n$.

39. (2+1+2 Punkte)

    Gegeben seien unabhängige Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim \text{Uniform}([0,\theta])$, $\theta > 0$.

    (i) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und anschließend die Dichte der Zufallsvariable $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$!

    (ii) Wie muss c_n gewählt werden, damit $\widehat{\theta} = c_n Y$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist? ($\widehat{\theta}$ ist erwartungstreu, falls $E_\theta \widehat{\theta} = \theta$ für alle $\theta > 0$.)

    (iii) Berechnen Sie das quadratische Risiko des erwartungstreuen Schätzers $\widehat{\theta} = c_n Y$!