**Übungsaufgaben zur VL EWMS, WS 2018/19**
Blatt 12, Abgabe: 23.01.2019, 10 Uhr

40. (1+1+2 Punkte)

Gegeben seien unabhängige Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$, wobei $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ sei bekannt. Betrachten Sie Schätzer der Form $\widehat{\sigma^2} = c \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

(i) Bestimmen Sie $E[(X_i - \mu)^4]$!

(ii) Wie muss $c$ gewählt werden, damit $\widehat{\sigma^2}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\sigma^2$ ist?

(iii) Durch welche Wahl von $c$ wird das quadratische Risiko minimiert?

41. (3 Punkte)

Ein klassisches Beispiel für die Anwendung der Poisson-Verteilung ist das berühmte Experiment, das *Ernest Rutherford* (1871-1937) und *Hans Geiger* (1882-1945) im Jahr 1910 durchgeführt hatten. Sie untersuchten die radioaktive Strahlung von Polonium. Rutherford konnte zwei verschiedene Komponenten, die er $\alpha$- und $\beta$-Strahlen nannte, unterscheiden. Polonium ist ein $\alpha$-Strahler, die Strahlen wurden damals durch Lichtblitze auf einem Zinksulfitschirm beobachtet (das noch heute verwendete Geiger-Müller-Zählrohr wurde erst 1928 eingeführt). In Ihrer 1910 erschienenen Arbeit "*The Probability Variations in the Distribution of $\alpha$ Particles*" beschreiben Rutherford und Geiger ihr Versuchsarrangement und geben ihre Messergebnisse an: In 2608 Zeitintervallen von je 7,5 Sekunden Länge beobachteten sie genau 10097 Zerfälle und erhielten die folgende Tabelle. In der ersten Zeile steht die Anzahl $k$ der Lichtblitze pro Zeitintervall, in der zweiten Zeile die Anzahl $a_k$ der Intervalle mit genau $k$ Lichtblitzen.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | $\geq 15$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_k$ | 57 | 203 | 383 | 525 | 532 | 408 | 273 | 139 | 45 | 27 | 10 | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Die Anzahl der Zerfälle in den Intervallen wird als unabhängig und poissonverteilt mit einem unbekannten Parameter $\lambda$ angenommen. (Wenn man annimmt, dass der Zerfall eines Atoms unabhängig vom Zerfall oder Nichtzerfall aller anderen Atome ist, so liegt eigentlich die Annahme einer Binomialverteilung für die Anzahl der Zerfälle in einem Intervall näher. Nach ÜA 32 kann man diese Verteilung jedoch durch eine Poissonverteilung approximieren.)

Bestimmen Sie zu den obigen Daten den Schätzwert nach der Maximum-Likelihood-Methode für den Parameter $\lambda$!

42. (3 Punkte)

Es werden Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ beobachtet, wobei $X_i \sim \text{Uniform}([0, \theta])$ und $\theta \in \Theta := (0, \infty)$.

Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{\theta}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode und berechnen Sie dessen quadratisches Risiko!