

Übungsaufgaben zur VL EWMS, WS 2018/19

Blatt 14, Abgabe: 06.02.2019, 10 Uhr

46. (2+1+1 Punkte)

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit einem unbekanntem Parameter $\theta \in \Theta := [0, \infty)$.

($P_\theta(X_n = k) = e^{-\theta} \theta^k / k!$ für $k = 0, 1, 2, \dots$)

(i) Beobachtet werden Realisierungen x_1, \dots, x_n von X_1, \dots, X_n .

Bestimmen Sie eine Schätzung $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$ für θ nach der Maximum-Likelihood-Methode!

(ii) Berechnen Sie für den Schätzer $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ den Erwartungswert $E_\theta \hat{\theta}_n$!

(iii) Ist die Folge der Maximum-Likelihood-Schätzer $(\hat{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (für $n \rightarrow \infty$) konsistent? Begründen Sie Ihre Aussage! (Benutzen Sie die Tatsache, dass $\text{Var}_\theta(X_i) < \infty$ ist!)

47 (3 Punkte)

Es werden Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit $X_i \sim \text{Poisson}(\theta)$ beobachtet.

Bestimmen Sie einem besten α -Test φ_α ($\alpha > 0$) für das Testproblem

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{gegen} \quad H_1: \theta = \theta_1,$$

wobei $0 < \theta_0 < \theta_1$ sei!

(Der kritische Wert c_α und die Randomisierungskonstante γ_α müssen nicht explizit angegeben werden. Es genügt, wenn deren Bestimmungsvorschrift angegeben wird. Darüber hinaus sollte der Test auf möglichst einfache Weise dargestellt werden.)