

Stochastik II – Mathematische Statistik für Physiker

W. Nagel

WS 2018

Übungsaufgaben, 1. Serie

1. Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 29.10.18 abzugeben.

Zufällige eindimensionale Irrfahrt

Ein Teilchen bewegt sich entlang der reellen Achse in Sprüngen der Länge 1 nach rechts (d.h. um +1) oder nach links (d.h. um -1). In jedem Zeitintervall $(n-1, n]$, $n = 1, 2, \dots$, findet genau ein Sprung statt. Unabhängig vom Zeitpunkt und unabhängig von den anderen Sprüngen seien die Wahrscheinlichkeiten in jedem der angegebenen Zeitintervalle

$P(\text{„Sprung nach rechts“}) = p$, $P(\text{„Sprung nach links“}) = 1 - p$, $0 < p < 1$.

Das Teilchen startet zum Zeitpunkt 0 im Ort 0.

- Berechnen Sie die Verteilungen der Zufallsvariablen X_n ... Position des Teilchens nach n Sprüngen, $n = 0, 1, 2, \dots$.
 - Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Position des Teilchens nach n Schritten.
 - Wenden Sie den Zentralen Grenzwertsatz an, um für $p = 1/2$ einen zu 0 symmetrischen Bereich zu approximieren, in dem sich das Teilchen nach n Schritten (n groß) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% aufhält. Skizzieren Sie diesen Bereich in Abhängigkeit von n .
2. Es seien X_1, \dots, X_n i.i.d. (unabhängige und identisch verteilte) Zufallsvariable, deren Varianzen existieren und endlich sind. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

3. Suchen Sie in Programmpaketen, die Ihnen zur Verfügung stehen, nach Statistik-Modulen, speziell auch nach Möglichkeiten, Zufallsvariablen zu simulieren (d.h. Zufallszahlen zu erzeugen). Zu welchen Verteilungen können Sie simulierte Werte erzeugen? Erzeugen Sie einige simulierte Stichproben und versuchen Sie, diese mit einem Statistik-Programm auszuwerten (z.B. Berechnung des Mittelwerts, der Stichprobenvarianz, ...).