Stochastik II – Mathematische Statistik für Physiker
W. Nagel
WS 2018
Übungsaufgaben, **2.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 13.11.18 abzugeben.**
   Gegeben sei eine konkrete Stichprobe: $x_1, \dots, x_n$. Es wird angenommen, dass sie aus einer Poisson-verteilten Grundgesamtheit mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ stammt. Bestimmen Sie alle Werte von λ, für welche die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten *dieser* Stichprobe maximal wird.

2. Gegeben sei eine konkrete Stichprobe $x_1, ..., x_n$ aus einer 0 - 1 -verteilten Grundgesamtheit (d.h. die Stichprobenwerte sind entweder 0 oder 1) mit unbekannter Wahrscheinlichkeit p für den Wert 1; vgl. Vorlesung, Beispiel (1.1) für statistische Räume.

   a) Berechnen Sie die Erwartungswerte der folgenden Statistiken (Punktschätzungen):
      $\hat{p}_1(X_1, ..., X_n) = \bar{X}$, (arithmetisches Mittel)
      $\hat{p}_2(X_1, ..., X_n) = X_1$,
      $\hat{p}_3(X_1, ..., X_n) = X_1^*$, (Minimum der $X_1, \dots, X_n$)
      $\hat{p}_4(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$.
   b) Vergleichen Sie die Varianzen der Schätzer aus a), deren Erwartungswert p ist.
   c) Geben Sie je einen Schätzer (d.h. eine Stichprobenfunktion) für $p(1-p)$ und für p^2 an, dessen Erwartungswert (für die mathematische Stichprobe) gleich $p(1-p)$ bzw. p^2 ist.

3. Simulieren Sie Folgen von (Pseudo-)Zufallszahlen mit Hilfe eines Computers und bestimmen Sie dazu die Folgen der Stichprobenmittel und der korrigierten empirischen Varianzen der ersten n Werte für $n = 2, 3, ...$

   Führen Sie dies für unterschiedliche Verteilungen durch, z.B. für die Gleichverteilung auf $[0, 1]$, die Standard-Normalverteilung, die Standard-Cauchy-Verteilung, eine Poisson-Verteilung.

4. Simulation mit Hilfe von Wegwerfmethoden

   (a) Gegeben sei ein Pseudo-Zufallszahlengenerator zur Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$, der eine Folge $u_1, u_2, \dots$ erzeugt. Es soll eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \dots$ simuliert werden, wobei Y_1 Verteilungsdichte f besitzt, die folgende Eigenschaften hat: Es existieren $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c > 0$, so dass $f(x) \le c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ für alle $x < a$ und alle $x > b$.

   (b) Gegeben sei ein Pseudo-Zufallszahlengenerator zu einer Verteilung mit der Dichte g, der eine Folge $x_1, x_2, \dots$ erzeugt. Außerdem erzeuge ein Pseudo-Zufallszahlengenerator zur Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$, eine Folge $u_1, u_2, \dots$. Es soll eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \dots$ simuliert werden, wobei Y_1 Verteilungsdichte f besitzt, die folgende Eigenschaft hat: Es existiert eine Zahl $a > 1$ so dass $f(x) \le a\, g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass der folgende Algorithmus das Gewünschte leistet:
   (1) $i = 1, j = 1$;
   (2) IF $a \cdot u_i \cdot g(x_i) \le f(x_i)$ THEN $y_j = x_i$, $j := j + 1$;
   (3) $i := i + 1$, GOTO (2)