

Stochastik II – Mathematische Statistik für Physiker

W. Nagel

WS 2018

Übungsaufgaben, 3. Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 26.11.2018 abzugeben.** Für den Parameter b im statistischen Raum

$$[\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_n, \{P_b^{\otimes n} : P_b \text{ ist die Gleichverteilung auf dem Intervall } (0, b); b > 0\}]$$

sollen erwartungstreue Schätzungen konstruiert und bezüglich ihrer Varianz verglichen werden.

- Geben Sie eine erwartungstreue Schätzung für b an, die auf dem arithmetischen Mittel basiert.
 - Geben Sie eine erwartungstreue Schätzung für b an, die auf dem Maximum $x_n^* = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ der Stichprobenwerte x_1, \dots, x_n basiert.
 - Vergleichen Sie die Varianzen der beiden Schätzungen aus (a) und (b).
2. Für den Parameter λ einer Poisson-Verteilung sind sowohl das Stichprobenmittel als auch die korrigierte empirische Varianz erwartungstreue Schätzungen, d.h., falls X_1, \dots, X_n unabhängig und Poissonverteilt sind mit dem Parameter $\lambda > 0$, dann gilt

$$\mathbb{E}_\lambda \bar{X} = \lambda \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_\lambda \hat{\sigma}^2(X_1, \dots, X_n) = \lambda.$$

Es soll festgestellt werden, welche der beiden Schätzungen besser ist. Wählen Sie dazu spezielle Werte für den Parameter λ und schätzen Sie mit Hilfe von Simulationen die Varianzen der beiden Schätzungen für diese Parameterwerte. Anstelle von Simulationen können Sie die Varianzen der Schätzer hier auch explizit berechnen.

3. Gesucht ist eine erwartungstreue Schätzung für den Parameter λ einer exponentialverteilten Grundgesamtheit, wobei die Schätzung eine Funktion der Summe der Stichprobenwerte sein soll.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Erwartungswert $\mathbb{E}_\lambda [\sum_{i=1}^n X_i]^{-1}$ für eine mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n aus einer exponentialverteilten Grundgesamtheit. Sie können die Tatsache benutzen, dass Exponentialverteilungen spezielle Gammaverteilungen sind.

4. Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung für den Parameter b im statistischen Raum

$$[\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_n, \{P_b^{\otimes n} : P_b \text{ ist die Gleichverteilung auf dem Intervall } (0, b); b > 0\}].$$