Stochastik II – Mathematische Statistik für Physiker
W. Nagel
WS 2018
Übungsaufgaben, **6.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 21.1.19 abzugeben.**
Für den Parameter μ einer normalverteilten Grundgesamtheit, d.h. im statistischen Raum
$$\left[\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_n, \{\mathcal{N}^{\otimes n}_{\mu,\sigma_0^2} : \ \mu \in \mathbb{R}\}\right],$$
wobei σ_0^2 als bekannt vorausgesetzt wird, ist ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α gesucht für das Hypothesenpaar $H_0 : \ \mu \leq \mu_0 \quad H_1 : \ \mu > \mu_0$. Dabei ist μ_0 ein vorgegebener Wert.
Hinweis: Sie können mit Hilfe des Satzes 6.2 der Vorlesung zeigen, dass der Gauss-Test ein gleichmäßig bester Test ist. Bestimmen Sie dazu zunächst den Dichtequotienten und suchen Sie darin eine Stichprobenfunktion/Statistik bezüglich der dieser Dichtequotient monoton ist. Formen Sie den gleichmäßig besten Test, den Satz 6.2 liefert, dann so um, dass man ihn als den Gauss-Test erkennt.

2. Die Dichte der Rayleigh-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$ lautet
$$f_\lambda(x) = \frac{2x}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\lambda}} \qquad \text{für } x > 0$$
und $f_\lambda(x) = 0$ für $x \leq 0$.
Gegeben seien ein Wert $\lambda_0 > 0$ und eine konkrete Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$, von der angenommen wird, dass sie aus einer Rayleigh-verteilten Grundgesamtheit stammt.

   (a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsgvariablen X^2 unter der Voraussetzung, dass X eine Rayleigh-Verteilung mit Parameter λ besitzt.

   (b) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $\sum_{i=1}^n X_i^2$, wenn $X_1, \ldots, X_n$, eine mathematische Stichprobe aus einer mit Parameter $\lambda_0 > 0$ Rayleigh-verteilten Grundgesamtheit stammt.

   (c) Bestimmen Sie für eine Rayleigh-verteilte Grundgesamtheit und zwei Parameterwerte $0 < \lambda_0 < \lambda'$ den Likelhoodquotienten
$$R(x_1, \ldots, x_n) = \frac{L(\lambda'; x_1, \ldots, x_n)}{L(\lambda_0; x_1, \ldots, x_n)}.$$

   (d) Geben Sie einen gleichmäßig besten Test zum Signifikanzniveau α für das Hypothesenpaar
$H_0 : \ \lambda \leq \lambda_0$,
$H_1 : \ \lambda > \lambda_0$
an, der die Testgröße $T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ verwendet.