

Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	11.04.2019
Abgabetermin:	18.04.2019

1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei A_n , $n \geq 1$, eine Folge von Teilmengen von Ω .

- Zeigen Sie, dass $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
- Zeigen Sie: Ist die Folge A_n monoton, so gilt

$$\liminf A_n = \limsup A_n.$$

- Seien A_n , $n \geq 1$ definiert durch $A_1 := (0, 1]$, $A_2 = (0, \frac{1}{2}]$, $A_3 = (\frac{1}{2}, 1]$, $A_4 = (0, \frac{1}{3}]$, $A_5 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $A_6 = (\frac{2}{3}, 1]$ usw. Bestimmen Sie $\liminf A_n$ und $\limsup A_n$.

Aufgabe 2. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne \mathcal{A}_n die σ -Algebra, welche vom System \mathcal{E}_n der Mengen $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$ erzeugt wird.

- Zeigen Sie, dass \mathcal{A}_n aus allen Mengen $A \subset \mathbb{N}$ besteht, welche entweder $A \subset \{1, \dots, n\}$ oder $m \in A$ für alle $m \geq n + 1$ erfüllen.
- Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.
- Ist $\mathcal{A} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ eine σ -Algebra in \mathbb{N} ?

♣ **Aufgabe 3** (3 Punkte). Beweisen Sie:

- Es sei $A \subset B \subset C$, dann gilt $C \setminus A = (C \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- Es gilt $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- Es gilt $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

♣ **Aufgabe 4** (5 Punkte).

- Sei $\{A_1, \dots, A_n\}$ eine Partition von Ω . Sei $\mathcal{A} = \sigma(A_1, \dots, A_n)$. Berechnen Sie $|\mathcal{A}|$.
- Sei $\{A_1, \dots, A_n\}$ ein beliebiges Mengensystem in Ω . Sei $\mathcal{A} = \sigma(A_1, \dots, A_n)$. Zeigen Sie, dass $|\mathcal{A}| \leq 2^{2^n}$.

♣ **Aufgabe 5** (4 Punkte). Gegeben sei die Funktion $f : X \rightarrow Y$. Beweisen Sie die Äquivalenz der Aussagen:

- f ist injektiv,
- $A \subset X \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = A$,
- $A, B \subset X \Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
- $(A, B \subset X) \wedge (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Abgabetermin: Die mit ♣ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und einmaliges Vorrechnen an der Tafel.