Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	18.04.2019
Abgabetermin:	25.04.2019

2. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) In der Vorlesung wurde der folgende Satz behandelt:
Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$.

(i) μ ist ein Prämaß.

(ii) Für jede Folge (A_n) von Mengen aus $\mathcal{R}$ mit $A_n \uparrow A$ und $A \in \mathcal{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iii) Für jede Folge (A_n) von Mengen aus $\mathcal{R}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $A_n \downarrow A$, $A \in \mathcal{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iv) Für jede Folge (A_n) von Mengen aus $\mathcal{R}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $A_n \downarrow \emptyset$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Dann gelten die Implikationen:

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv).$$

In der Vorlesung wurde $(i) \Leftrightarrow (ii)$ bewiesen. Zeigen Sie nun, dass $(ii) \Rightarrow (iii)$ gilt.

b) Auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ sei das Zählmaß $\mu(A) = |A|$, $A \subseteq \mathbb{N}$ definiert. Gilt für jede Mengenfolge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ mit $A_n \subseteq \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)?$$

Aufgabe 2. Ein System $\mathcal{D}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt ein *Dynkin-System*, falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^c \in \mathcal{D}$,

(iii) $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}, D_i \in \mathcal{D}$ mit $D_i \cap D_j = \emptyset$ für $i \neq j \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

a) Zeigen Sie:

$$D, E \in \mathcal{D}, D \subset E \Rightarrow E \setminus D \in \mathcal{D}.$$

b) Geben Sie ein Beispiel für ein Dynkin-System an, welches keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie eine nicht $\mathcal{B}(\mathbb{R})$–messbare Menge.
(Hinweis: Man zerlege $\mathbb{R}$ durch die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ in Äquivalenzklassen und konstruiere daraus die gesuchte Menge. Dabei ist $\mathbb{Q}$ die Menge rationaler Zahlen.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie das Lebesguemaß der Menge A mit

$$A = \{x \in [0,1) : \text{ die Dezimalzahldarstellung von } x \text{ enthält keine } 5\}.$$

Hinweis: Um die Dezimalzahldarstellung einer Zahl $x \in [0,1)$, $x = 0,x_1x_2x_3\dots$ eindeutig zu machen, verwenden wir, falls möglich, immer die abbrechende Darstellung (d. h. Periode 9 ist nicht erlaubt).

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für jede Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ und jedes Mengensystem $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ gilt:

$$T^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')) = \sigma(T^{-1}(\mathcal{E}')).$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Sei $\Omega := \{1,2,3,4\}$ und $\mathcal{D} := \{\{1,2\},\{2,4\},\{1,3\},\{3,4\}\}$. Bestimmen Sie zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ auf $\sigma(\mathcal{D})$, die die folgenden zwei Eigenschaften erfüllen:

(i) $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ auf $\mathcal{D}$,

(ii) $\mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$ auf $\sigma(\mathcal{D})$.

Abgabetermin: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und einmaliges Vorrechnen an der Tafel.