Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	25.04.2019
Abgabetermin:	02.05.2019

3. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die nicht fallend und rechtsstetig ist. Zeigen Sie, dass diese Funktion auf dem Ring $\mathcal{R}^1$ ein Prämaß

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$$

definiert. Kann dieses Prämaß zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R}^1)$ fortgesetzt werden?

Aufgabe 2.

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Man zeige, dass dann auch

$$f^a(x) := \begin{cases} a & : f(x) > a \\ f(x) & : f(x) \leq a \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R} \text{ fest})$$

Borel-messbar ist.

b) Zeigen Sie, dass $f(x) = \sin\lfloor x \rfloor$ Borel–messbar ist, wobei $\lfloor x \rfloor$ den ganzzahligen Anteil von x bezeichnet.

c) Geben Sie eine Funktion f an, die nicht $\mathcal{B}(\mathbb{R})$–messbar, f^2 jedoch messbar ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie den Eindeutigkeitssatz: Sei $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω, in welchem eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen existiert, sodass $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
Dann sind zwei Maße μ_1, μ_2 auf $\mathcal{A}$ mit

$$\begin{aligned} &\mu_1(E) = \mu_2(E), && \text{für alle } E \in \mathcal{E} \\ &\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty, && \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

gleich.

Hinweis: Ein Erzeuger $\mathcal{E}$ heißt $\cap$-stabil, falls für jeweils zwei Mengen $A, B \in \mathcal{E}$ gilt, dass $A \cap B \in \mathcal{E}$.
Zeigen Sie zunächst, dass gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$, wobei $\delta(\mathcal{E})$ das kleinste Dynkin-System definiert, welches $\mathcal{E}$ enthält.
Betrachten Sie anschließend für beliebiges $E \in \mathcal{E}$, $\mu_1(E) < \infty$, das Mengensystem

$$\mathcal{D}_E := \{A \in \mathcal{A} :\ \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Man zeige:

a) f ist Borel-messbar.

b) f besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen. Zeigen Sie, dass f Borel-messbar ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{O} = \{A \subset \mathbb{R} \colon A \text{ ist offen}\}$ ein System von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\mathcal{H} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \colon a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ ein System halboffener Teilmengen.
Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{H}) =: \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass sich jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ als höchstens abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen darstellen lässt.

Abgabetermin: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> einmaliges Vorrechnen an der Tafel.