Stochastik 2

SS 2019, FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Verena Köpp

Ausgabetermin:	02.05.2019
Abgabetermin:	09.05.2019

4. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Es sei $\Omega_0 \subset \Omega$ eine höchstens abzählbare Menge mit $\mu(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$. Außerdem gelte für alle $\omega \in \Omega_0$, dass $\{\omega\} \in \mathcal{F}$. Sei nun $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine Funktion, die bezüglich $\mathcal{F}$ messbar ist. Zeigen Sie:

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{\omega \in \Omega_0} f(\omega)\mu(\{\omega\}).$$

Aufgabe 2.

a) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und f eine messbare Funktion. Dann gilt:

$$N_q(f) \leq N_p(f)\, \mu(\Omega)^{1/q-1/p}$$

für $1 \leq q \leq p < \infty$.

b) Für $1 < p, q < \infty$ konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\mu)$ gegen f und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^q(\mu)$ gegen g, wobei

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dann konvergiert $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mu)$ gegen fg.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{F}$ eine σ–Algebra auf Ω und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Ferner sei

$$\bar{\mathcal{F}} := \{A \subset \Omega \colon A = B \cup N, B \in \mathcal{F}, N \subset C \in \mathcal{F} \text{ und } \mu(C) = 0\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\bar{\mathcal{F}}$ ist eine σ–Algebra.

b) Auf $\left(\Omega, \bar{\mathcal{F}}\right)$ wird durch

$$\bar{\mu}(A) = \mu(B)$$

ein Maß definiert, wobei $A = B \cup N$ mit $A \in \bar{\mathcal{F}}$, $B \in \mathcal{F}$ und $N \subset C \in \mathcal{F}$, für eine μ–Nullmenge C (d.h. es ist zu zeigen, dass $\bar{\mu}$ wohldefiniert ist unabhängig von der Wahl von B und N).

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei μ ein Maß auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$. Ferner gelte für zwei Funktionen $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu,$$

für alle $A \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie: Es existiert $B \in \mathcal{F}$ mit $\mu(B^c) = 0$, sodass $f(\omega) \leq g(\omega)$ für alle $\omega \in B$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $x = 0,x_1x_2x_3\dots$ die Dezimalbruchentwicklung von $x \in [0,1)$ (ohne Periode 9). Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0,1) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\,, \qquad f(x) := \begin{cases} +\infty & x_k \neq 5 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \\ \min\{k : x_k = 5\} & \text{sonst,} \end{cases}$$

Borel-messbar und λ–f.ü. endlich ist. Berechnen Sie $\int_{[0,1)} f\, d\lambda$.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und in der Vorlesung am Donnerstag abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen. Die Übungsserien dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden.
Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien <u>und</u> einmaliges Vorrechnen an der Tafel.